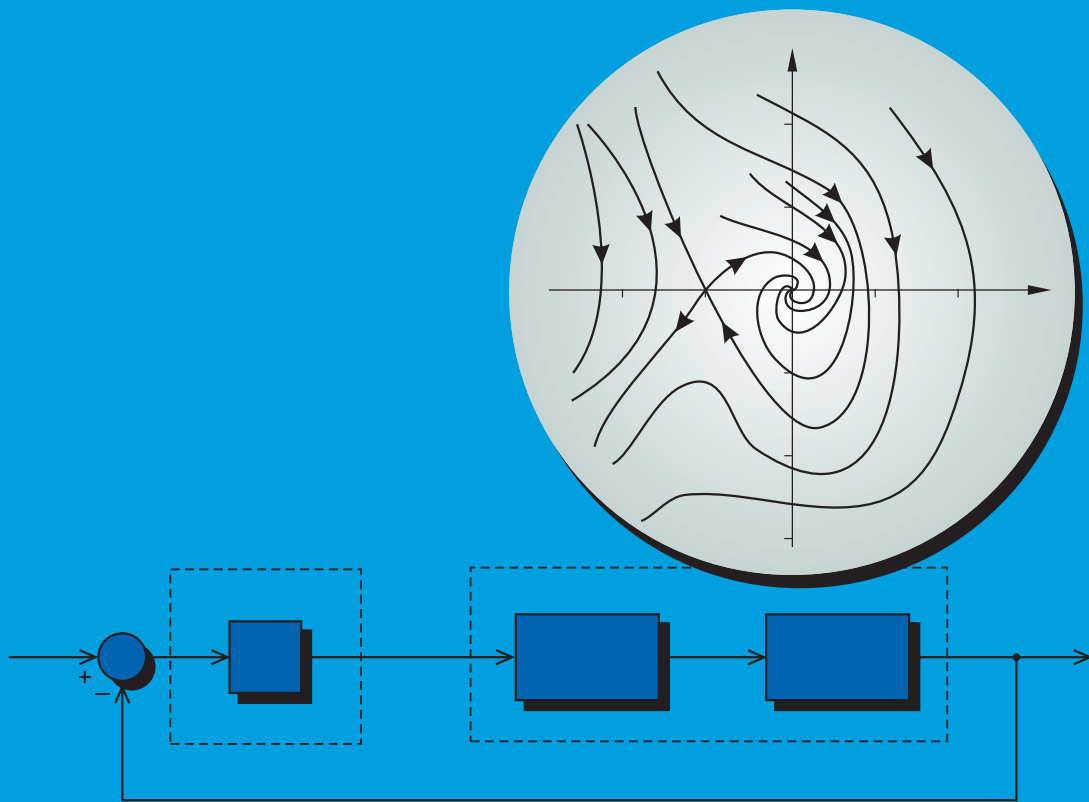


Tadeusz Kaczorek | Andrzej Dzieliński
Włodzimierz Dąbrowski | Rafał Łopatka

Podstawy teorii sterowania



Prof. dr hab. Tadeusz Kaczorek od czasu studiów jest związany z Wydziałem Elektrycznym Politechniki Warszawskiej, na którym pełnił wiele ważnych funkcji. W 2002 r. przeszedł na emeryturę i został profesorem na Wydziale Elektrycznym Politechniki Białostockiej. Jest doktorem *honoris causa* 9 polskich uczelni: Uniwersytetu Zielonogórskiego, Politechniki Warszawskiej, Politechniki Szczecińskiej, Politechniki Lubelskiej, Politechniki Łódzkiej, Politechniki Białostockiej, Politechniki Opolskiej, Politechniki Poznańskiej i Politechniki Rzeszowskiej. Od wielu lat oprócz pracy dydaktycznej prowadzi działalność naukową, będąc członkiem Komitetu Elektrotechniki oraz Komitetu Automatyki i Robotyki PAN, Centralnej Komisji ds. Stopni i Tytułów, a także redaktorem naczelnym Biuletynu PAN oraz członkiem rad programowych kilku polskich i zagranicznych czasopism naukowych. W dorobku ma ponad 1000 publikacji z zakresu automatyki, inżynierii komputerowej, informatyki, robotyki oraz teorii sterowania. Jest twórcą szkoły naukowej teorii i systemów sterowania znanej w Europie i Stanach Zjednoczonych, dzięki licznym referatom wygłoszonym na konferencjach oraz kongresach naukowych.

Dr hab. inż. prof. PW Andrzej Dzieliński jest dyrektorem Instytutu Sterowania i Elektroniki Przemysłowej na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Pracował naukowo we Francji, Włoszech, Wielkiej Brytanii i Stanach Zjednoczonych. Zajmuje się sterowaniem układami dwuwymiarowymi, adaptacyjnymi, nieliniowymi, sieciami neuronowymi i przetwarzaniem obrazów. Opublikował na ten temat blisko 100 artykułów w czasopismach naukowych i materiałach konferencyjnych.

Dr inż. Włodzimierz Dąbrowski pracuje w Instytucie Sterowania i Elektroniki Przemysłowej na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej oraz w Katedrze Inżynierii Oprogramowania Polsko-Japońskiej Wyższej Szkoły Technik Komputerowych w Warszawie. Zainteresowania naukowe skupia wokół projektowania dużych systemów informacyjnych, zarządzania projektami programistycznymi oraz wielowymiarowych układów dynamicznych. Jest autorem licznych artykułów i referatów z zakresu informatyki.

Dr inż. Rafał Łopatka pracuje jako adiunkt w Instytucie Sterowania i Elektroniki Przemysłowej na Wydziale Elektrycznym Politechniki Warszawskiej. Specjalizuje się w teorii sterowania, jest autorem kilku publikacji z tej dziedziny.

Podstawy teorii sterowania

Tadeusz Kaczorek
Andrzej Dzieliński
Włodzimierz Dąbrowski
Rafał Łopatka

Podstawy teorii sterowania



Wydawnictwo WNT

Opiniodawcy I wydania: prof. dr hab. inż. Jerzy Klamka
prof. dr hab. inż. Wojciech Mitkowski

Redaktor: Lech Oleksiak
Do III wydania przygotowała Maria Kasperska

Projekt okładki i stron tytułowych: GRAFOS
Zdjęcie na okładce: Gethin Lane/iStockphoto.com
Wydawca: Adam Filutowski
Redaktor techniczny: Grażyna Miazek

Współpraca reklamowa: reklama@pwn.pl

Książka, którą nabyłeś, jest dziełem twórcy i wydawcy. Prosimy, abyś przestrzegał praw, jakie im przysługują. Jej zawartość możesz udostępnić nieodpłatnie osobom bliskim lub osobiście znanym. Ale nie publikuj jej w internecie. Jeśli cytujesz jej fragmenty, nie zmieniaj ich treści i koniecznie zaznacz, czyje to dzieło. A kopiując jej część, rób to jedynie na użytek osobisty.

Szanujmy cudzą własność i prawo
Więcej na www.legalnakultura.pl
Polska Izba Książki

Copyright © by Wydawnictwo WNT
Warszawa 2009, 2013
Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2016

ISBN 978-83-01-18591-6

Wydanie III – 1 dodruk (PWN)
Warszawa 2016

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-460 Warszawa, ul. Gottlieba Daimlera 2
tel. 22 69 54 321, faks 22 69 54 288
infolinia 801 33 33 88
e-mail: pwn@pwn.com.pl,
www.pwn.pl

Druk i oprawa: OSDW Azymut Sp. z o.o.

SPIS TREŚCI

Przedmowa	ix
1. Wprowadzenie	1
1.1. Pojęcia podstawowe i istota układu regulacji automatycznej	1
1.2. Klasyfikacja układów regulacji automatycznej	4
1.3. Zarys treści książki i jak z niej korzystać	8
1.4. Opis liniowych układów dynamicznych	10
1.5. Układy statyczne oraz dynamiczne stacjonarne i niestacjonarne	14
1.5.1. Behawiorystyczna definicja układu	14
1.5.2. Relacyjna definicja układu	17
1.6. Linearyzacja układów nieliniowych	19
1.6.1. Metoda rozwinięcia w szereg	19
1.6.2. Metoda optymalnej linearyzacji	23
1.6.3. Metoda nieliniowego sprzężenia zwrotnego	27
1.7. Modele układów dynamicznych	29
1.7.1. Układy elektryczne	29
1.7.2. Układy mechaniczne	32
1.7.3. Układy elektromechaniczne	33
1.7.4. Procesy mieszania substancji	37
1.7.5. Układy o parametrach rozłożonych	39
1.7.6. Równanie logistyczne w biologii	42
1.7.7. Model Lotki-Volterry układu drapieżnik – ofiara	43
1.7.8. Model Maya układu drapieżnik – ofiara	43
1.7.9. Model Solowa wzrostu gospodarczego	44
1.7.10. Model Leontiefa produkcji w n sektorach	45
1.8. Zadania	46
2. Modele matematyczne liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych	49
2.1. Wprowadzenie	49
2.2. Modele czasowe	50
2.2.1. Równania różniczkowe i różnicowe	50
2.2.2. Zmienne stanu	50

2.2.3.	Model zmiennych stanu układów ciągłych	51
2.2.4.	Model zmiennych stanu układów dyskretnych	55
2.2.5.	Równanie wyjścia modelu zmiennych stanu	55
2.2.6.	Modele AR, ARMA i ARMAX	57
2.2.7.	Charakterystyka skokowa i charakterystyka impulsowa	61
2.2.8.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	62
2.3.	Modele częstotliwościowe	73
2.3.1.	Transmitancja operatorowa	73
2.3.2.	Transmitancja widmowa	76
2.3.3.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	81
2.4.	Podstawowe człony dynamiczne	90
2.4.1.	Człon bezinercyjny	90
2.4.2.	Człon całkujący idealny	94
2.4.3.	Człon różniczkujący idealny	98
2.4.4.	Człon inercyjny pierwszego rzędu	102
2.4.5.	Człon opóźniający	106
2.4.6.	Człon całkujący rzeczywisty	109
2.4.7.	Człon różniczkujący rzeczywisty	113
2.4.8.	Człon inercyjny drugiego rzędu	116
2.4.9.	Człon oscylacyjny	120
2.4.10.	Zadania	123
2.5.	Związek między modelem zmiennych stanu a modelem typu wejście-wyjście	125
2.5.1.	Wzajemne relacje między modelami	125
2.5.2.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	127
2.6.	Zadania	128
3.	Modele matematyczne nieliniowych układów dynamicznych	131
3.1.	Wprowadzenie	131
3.2.	Analiza metodą płaszczyzny fazowej	132
3.2.1.	Pojęcia analizy metodą płaszczyzny fazowej	132
3.2.2.	Sporządzanie portretu fazowego	137
3.2.3.	Analiza układów liniowych metodą płaszczyzny fazowej	141
3.2.4.	Analiza układów nieliniowych metodą płaszczyzny fazowej ..	144
3.2.5.	Podsumowanie	147
3.2.6.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	147
4.	Własności układów	153
4.1.	Stabilność układów dynamicznych	153
4.1.1.	Pojęcia związane ze stabilnością	153
4.1.2.	Badanie stabilności liniowych układów ciągłych	159
4.1.3.	Kryteria stabilności układów ciągłych	161
4.1.4.	Badanie stabilności liniowych układów dyskretnych	189
4.1.5.	Teoria Lapunowa badania stabilności układów nieliniowych ..	195
4.1.6.	Metody doboru funkcji Lapunowa	213
4.1.7.	Podsumowanie	218
4.1.8.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	219

4.2.	Osiągalność, sterowalność, obserwowalność i odtwarzalność układów liniowych	222
4.2.1.	Osiągalność układów dyskretnych	222
4.2.2.	Sterowalność do zera i sterowalność układów dyskretnych ...	228
4.2.3.	Obserwowalność układów dyskretnych	231
4.2.4.	Odtwarzalność układów dyskretnych	237
4.2.5.	Dyskretne układy dualne	240
4.2.6.	Osiągalność wyjściowa układów dyskretnych	241
4.2.7.	Osiągalność i sterowalność układów ciągłych	244
4.2.8.	Obserwowalność i odtwarzalność układów ciągłych	249
4.2.9.	Stabilizowalność i wykrywalność układów dyskretnych i ciągłych	253
4.2.10.	Dekompozycja pary (A, B) i (A, C)	257
4.2.11.	Dekompozycja Kalmana układów liniowych	263
4.2.12.	Zbiór stanów osiągalnych i R -sterowalność układów singularnych	270
4.2.13.	Sterowalność i sterowalność impulsowa układów singularnych	276
4.2.14.	R -obserwowalność układów singularnych	285
4.2.15.	Obserwowalność układów singularnych	287
4.2.16.	Obserwowalność impulsowa układów singularnych	290
4.2.17.	Dekompozycja układów singularnych	295
4.2.18.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	300
4.3.	Zera i Bieguny	302
4.3.1.	Układy SISO	302
4.3.2.	Postać Smitha macierzy	303
4.3.3.	Układy wielowymiarowe MIMO	306
4.3.4.	Bieguny i zera w nieskończoności	307
4.4.	Postacie kanoniczne	309
4.4.1.	Redukcja macierzy do postaci Frobeniusa	309
4.4.2.	Redukcja macierzy do postaci kanonicznej Jordana	319
4.4.3.	Postacie kanoniczne macierzy układów o jednym wejściu ...	331
4.4.4.	Postacie kanoniczne macierzy układów o jednym wyjściu ...	339
4.4.5.	Postacie kanoniczne macierzy układów o wielu wejściach ...	345
4.4.6.	Postacie kanoniczne macierzy układów o wielu wyjściach ...	359
4.4.7.	Postacie kanoniczne macierzy układów singularnych	370
4.4.8.	Jak to zrobić w MATLAB-ie	376
4.5.	Zadania	378

A. Podstawy rachunku macierzowego 393

A.1.	Podstawowe rodzaje macierzy	393
A.2.	Wyznacznik macierzy i jego własności	395
A.3.	Podstawowe działania na macierzach	396
A.4.	Minory i wyznacznik iloczynu macierzy oraz rząd macierzy	398
A.5.	Jądro i obraz macierzy	400
A.6.	Lewa i prawa odwrotność macierzy	401
A.7.	Rozwiązywanie układu równań liniowych	403
A.8.	Wartości własne i wektory własne macierzy	405

A.9. Rozkład macierzy względem wartości własnych i wartości szczególnych	406
A.10. Formy kwadratowe dodatnio określone	409
A.11. Normy wektorów i macierzy	412
A.12. Macierz pseudoodwrotna Moore'a-Penrose'a	414
A.13. Wielomian zerujący i minimalny macierzy oraz wzór Sylwestera	415
A.14. Macierze blokowe	418
A.15. Iloczyn Kroneckera macierzy	420
A.16. Jak to zrobić w MATLAB-ie	421
B. Równania różniczkowe i różnicowe	429
B.1. Różniczkowanie i całkowanie macierzy	429
B.2. Równania różniczkowe	432
B.3. Równania różnicowe	435
B.4. Macierzowe równanie różniczkowe Riccatiego	438
B.5. Pochodna Liego funkcji skalarnej wzdłuż wektora pola	440
B.6. Nawias Liego pól wektorowych	442
B.7. Dystrybucje, dystrybucje inwolutywne i dystrybucje inwariantne	445
B.7.1. Dystrybucje	445
B.7.2. Dystrybucje inwolutywne	447
B.7.3. Dystrybucje inwariantne	448
C. Przekształcenia całkowe	451
C.1. Przekształcenie Laplace'a i jego własności	451
C.1.1. Przekształcenie Laplace'a	451
C.1.2. Podstawowe własności przekształcenia Laplace'a	455
C.1.3. Odwrotne przekształcenie Laplace'a oraz wyznaczenie oryginału danej transformaty	458
C.1.4. Rozwiązywanie równań różniczkowych metodą operatorową .	460
C.2. Przekształcenie $\mathcal{Z}$ i jego własności	463
C.2.1. Przekształcenie $\mathcal{Z}$	463
C.2.2. Podstawowe własności przekształcenia $\mathcal{Z}$	465
C.2.3. Odwrotne przekształcenie $\mathcal{Z}$ oraz wyznaczenie oryginału danej transformaty	467
C.2.4. Rozwiązywanie równań różnicowych metodą operatorową ...	470
C.2.5. Jak to zrobić w MATLAB-ie	472
D. Elementy logiki i dowodzenie twierdzeń	475
D.1. Zdania proste i złożone	475
D.2. Prawa logiczne	477
D.3. Dowodzenie twierdzeń	479
Bibliografia	483
Skorowidz	493

PRZEDMOWA

Książka ta jest podręcznikiem podstaw teorii sterowania. Pisaliśmy ją z myślą o studentach studiów inżynierskich i magisterskich kierunków technicznych, takich jak elektrotechnika, elektronika i mechatronika, automatyka i robotyka, mechanika, informatyka itp. Obejmuje ona podstawy teorii sterowania zarówno układów liniowych, jak i nieliniowych, ciągłych i dyskretnych, standardowych i singularnych, optymalnych i adaptacyjnych.

Książka składa się z 4 rozdziałów, 4 dodatków oraz wykazu literatury. Rozdział 1 stanowi obszernie wprowadzenie w problematykę książki. Rozdział 2 poświęciliśmy modelom matematycznym liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych. W rozdziale 3 przedstawiliśmy modele matematyczne nieliniowych układów dynamicznych. W rozdziale 4 opisaliśmy podstawowe własności układów dynamicznych, takie jak stabilność, osiągalność, sterowalność, obserwowalność, zera i bieguny. W trzech dodatkach podaliśmy podstawowe wiadomości z rachunku macierzowego, równań różniczkowych i różnicowych, obliczania pochodnych Liego i rachunku operatorowego opartego na przekształceniu Laplace'a i przekształceniu $\mathcal{Z}$. W drugim wydaniu, w nowym czwartym dodatku, przedstawiliśmy elementy logiki i metody dowodzenia twierdzeń. Wykładany materiał zilustrowaliśmy licznymi przykładami. Duży nacisk położyliśmy na możliwość realizacji algorytmów na komputerze, zwłaszcza w programie MATLAB. Przybliżony podział materiału podręcznika na materiał zgodny z programem nauczania na studiach inżynierskich i magisterskich przedstawiliśmy na rysunku 1.5.

Chcielibyśmy skorzystać z okazji i złożyć tu serdeczne podziękowania Recenzentom – Profesorom Jerzemu Klamce i Wojciechowi Mitkowskiemu za wnikliwe uwagi i sugestie, które pomogły nam usunąć usterki oraz zwiększyć jasność i precyzję wykładu.

Warszawa, kwiecień 2006

*Tadeusz Kaczorek
Andrzej Dzieliński
Włodzimierz Dąbrowski
Rafał Łopatka*

1.1. Pojęcia podstawowe i istota układu regulacji automatycznej

Sterowaniem nazywamy celowe oddziaływanie (wpływanie) na przebieg procesów. Sterowanie dzielimy na sterowanie ręczne i automatyczne. Sterowaniem ręcznym nazywamy sterowanie realizowane przez człowieka, a sterowaniem automatycznym – sterowanie realizowane za pomocą odpowiednich urządzeń sterujących. Przykładem sterowania ręcznego jest prowadzenie samochodu. Rozróżniamy sterowanie w układzie otwartym i sterowanie w układzie zamkniętym, czyli w układzie ze sprzężeniem zwrotnym. Przykładem sterowania w układzie otwartym jest stabilizacja napięcia, oparta na wykorzystaniu nieliniowej zależności napięcia od prądu (dużym zmianom prądu odpowiadają małe zmiany napięcia). Sterowanie w układzie zamkniętym nazywamy *regulacją*. Regulacja jest więc pojęciem węższym od sterowania. Regulacją automatyczną nazywamy sterowanie w układzie zamkniętym realizowane samoczynnie (bez udziału człowieka) za pomocą odpowiednich urządzeń sterujących. Urządzenia te, wykorzystując różnice między odpowiednimi sygnałami (wielkościami) zadanymi i mierzonymi, wytwarzają sygnały oddziaływające celowo na przebieg procesów; zwane są wielkościami sterującymi, krótko – sterowaniami.

Za pojęcia pierwotne (których nie definiujemy) przyjmujemy pojęcia środowiska i układu fizycznego. Układem nazywać będziemy umownie wyodrębniony ze środowiska układ fizyczny lub jego część.

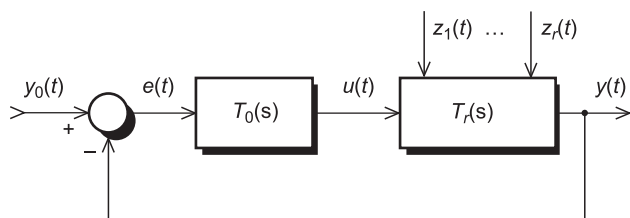
Wielkości charakteryzujące oddziaływanie środowiska na wyodrębniony układ nazywać będziemy wymuszeniami lub wielkościami (sygnałami) wejściowymi. Wymuszenia dzielimy na wielkości sterujące (sterowania) i wielkości zakłócające (zakłócenia). *Wielkościami sterującymi* nazywamy wielkości które dla osiągnięcia pożądanego zachowania układu są zmieniane celowo, a *wielkościami zakłócającymi* – wielkości podlegające zmianom przypadkowym (losowym). Wielkości charakteryzujące oddziaływanie układu na środowisko nazywamy odpowiedziami lub wielkościami (sygnałami) wyjściowymi układu.

Stanem układu nazywać będziemy najmniejszy liczebnie zbiór wielkości, którego znajomość w chwili początkowej t_0 oraz znajomość wymuszeń w przedziale $(y_0, t]$ pozwala wyznaczyć stan i odpowiedź układu w dowolnej chwili $t > t_0$. Dla szerokiej klasy układów dynamicznych znajomość stanu układu w chwili początkowej t_0 oraz wymuszenia $u(t)$, $t \geq t_0$ pozwala wyznaczyć stan oraz odpowiedź tego układu dla $t > t_0$. Układ regulacji automatycznej powinien zapewnić pożądany przebieg wybranych wielkości charakteryzujących proces, mimo działających zakłóceń i niedokładnej znajomości parametrów tego procesu. Osiąga się to przez zastosowanie sprzężenia zwrotnego.

DEFINICJA 1

Układem regulacji automatycznej nazywamy układ ze sprzężeniem zwrotnym, który samoczynnie (bez udziału człowieka) zapewnia pożądany przebieg wybranych wielkości charakteryzujących proces, zwanych wielkościami regulowanymi.

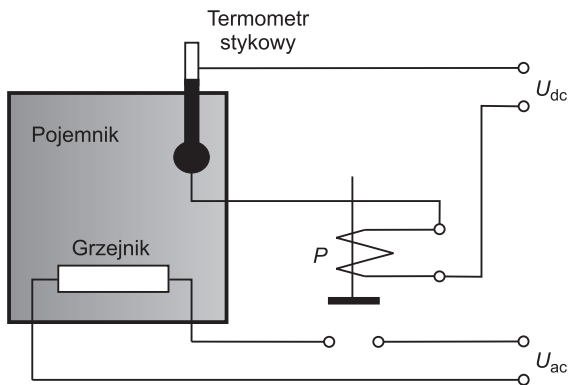
W układzie regulacji automatycznej wyróżnić można obiekt regulacji i regulator (urządzenie sterujące). *Obiektem regulacji* (krótko – obiektem) nazywamy proces technologiczny lub urządzenie, w którym zachodzi proces podlegający regulacji. Obiektem regulacji może być na przykład: samolot, proces chemiczny, maszyna elektryczna, obrabiarka, robot. *Regulatorem* nazywać będziemy urządzenie, które wykorzystując różnice między odpowiednimi wielkościami zadanymi i mierzonymi, tak oddziałuje – za pomocą wielkości sterujących – na obiekt, aby wielkości regulowane miały pożądany przebieg. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej jednej wielkości regulowanej $y(t)$ przedstawiono na rys. 1.1.



Rys. 1.1. Schemat blokowy układu regulacji automatycznej

W schemacie tym obiekt jest reprezentowany przez człon o transmitancji operatorowej $T_0(s)$, a regulator – przez człon o transmitancji operatorowej $T_r(s)$. Porównanie wielkości regulowanej $y(t)$ z jej wartością zadaną $y_0(t)$ (wielkością zadającą lub wielkością odniesienia) dokonuje się w węźle sumacyjnym. Różnicę $e(t) = y_0(t) - y(t)$ nazywamy *uchybem regulacji*. Układ regulacji automatycznej pracuje dobrze (idealnie), jeżeli mimo działających na obiekt zakłóceń $z_1(t)$, ..., $z_r(t)$ uchyb regulacji $e(t)$ jest możliwie mały (teoretycznie równy

zeru). Podstawowym celem układu regulacji automatycznej jest więc samoczynne zerowanie uchybu regulacji, wywołanego zmianą $y_0(t)$ lub działających na obiekt zakłóceń $z_1(t), \dots, z_r(t)$. Zadaniem regulatora jest wytworzenie na podstawie uchybu regulacji $e(t)$ takiego sygnału sterującego (sterowania) $u(t)$, aby uchyb ten teoretycznie zmalał do zera. Na rysunku 1.2 przedsta-

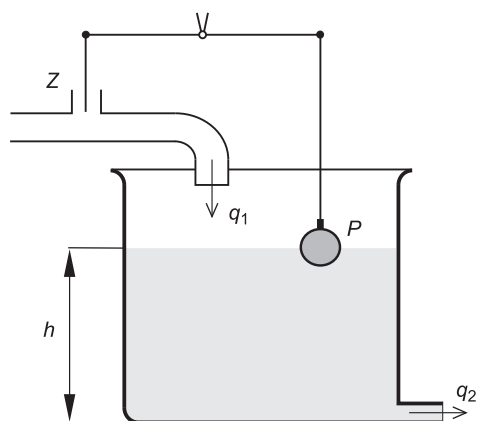


Rys. 1.2. Układ regulacji temperatury

wiono schemat ideowy prostego układu regulacji automatycznej temperatury t wewnątrz pojemnika. Zadaniem układu regulacji jest utrzymanie wewnątrz pojemnika stałej temperatury o wartości t_0 wyższej niż temperatura otoczenia t_z . W układzie tym rolę elementu pomiarowego i porównującego odgrywa termometr stykowy, który ma wbudowane dwie elektrody. Górna elektroda, ruchoma, pozwala nastawić zadaną wartość temperatury t_0 . Układ ten działa w następujący sposób. Gdy temperatura wewnątrz pojemnika przekroczy wartość zadaną t_0 , wówczas zostaje otwarty obwód przekaźnika P i przekaźnik ten wyłącza grzejnik. Jeśli natomiast temperatura wewnątrz pojemnika obniży się do wartości mniejszej niż zadana t_0 , to wówczas zostanie otwarty obwód przekaźnika P i przekaźnik ponownie włącza grzejnik. W tym przypadku obiektem regulacji jest pojemnik wraz z grzejnikiem, a regulatorem – termometr stykowy i przekaźnik P . Wielkością regulowaną jest temperatura t wewnątrz pojemnika, sterowaniem – napięcie zasilające grzejnik U , a zakłóceniem – zmieniająca się temperatura otoczenia t_z .

Na rysunku 1.3 przedstawiono schemat ideowy prostego układu regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku. Zadaniem tego układu jest utrzymanie stałego poziomu h_0 cieczy w zbiorniku przy zmieniającej się w sposób przypadkowy wartości q_2 strumienia cieczy wypływającej ze zbiornika. Układ ten działa następująco.

Jeżeli z jakiegokolwiek powodu poziom cieczy h się obniży, to pływak P , opadając w dół, za pomocą dźwigni i zaworu Z zwiększa wartość q_1 strumienia cieczy dopływającej do zbiornika, co powoduje stopniowe podwyższenie poziomu cieczy h . W tym przypadku obiektem regulacji jest zbiornik, a regulatorem



Rys. 1.3. Schemat układu regulacji poziomu cieczy

– zespół: pływak P , dźwignia i zawór Z . Wielkością regulowaną jest poziom cieczy h w zbiorniku, sterowaniem – wartość q_1 strumienia cieczy dopływającej do zbiornika, a zakłóceniem – zmieniająca się wartość q_2 strumienia cieczy wypływającej ze zbiornika.

1.2. Klasyfikacja układów regulacji automatycznej

Układy regulacji automatycznej można klasyfikować według różnych kryteriów, takich jak: liniowość, liczba wejść i wyjść, charakter sygnałów, zadania układu, zdolność samoczynnego dopasowywania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń itp.

Ze względu na cechę (własność) liniowości układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- liniowe,
- nieliniowe.

Układ regulacji automatycznej będziemy nazywać liniowym, jeżeli spełnia on następującą zasadę superpozycji.

DEFINICJA 2

Układ spełnia zasadę superpozycji, jeżeli odpowiedź na wymuszenie

$$u = \sum_{i=1}^m a_i u_i \quad (a_i - \text{liczby rzeczywiste}) \quad (1.1)$$

będące kombinacją liniową wymuszeń $u_1, u_2, \dots, u_m$, równa się kombinacji liniowej

$$y = \sum_{i=1}^m a_i y_i \quad (1.2)$$

odpowiedzi $y_1, y_2, \dots, y_m$, przy czym y_i jest odpowiedzią tego układu na wymuszenie u_i .

Układy liniowe są opisane liniowymi równaniami algebraicznymi, różniczkowymi (zwykłymi lub cząstkowymi), różnicowymi, całkowymi – ogólnie operatorami liniowymi. Łatwo wykazać, że warunkiem koniecznym, ale niedostatecznym, liniowości układu jest liniowość jego charakterystyk statycznych. Układ o charakterystyce statycznej $y = au + b$, dla $b \neq 0$ nie spełnia zasady superpozycji. Układ regulacji automatycznej, który nie spełnia zasady superpozycji, nazywać będziemy nieliniowym. Układy nieliniowe są opisane nieliniowymi równaniami algebraicznymi, różniczkowymi (zwykłymi lub cząstkowymi), różnicowymi, całkowymi – ogólnie operatorami nieliniowymi.

Ze względu na liczbę wejść i wyjść (wielkości regulowanych) układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy o jednym wejściu i jednym wyjściu,
- układy o wielu wejściach i wielu wyjściach.

Przykładem układu o jednym wejściu i jednym wyjściu (jednej wielkości regulowanej) jest układ regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku, którego schemat ideowy pokazano na rys. 1.3.

Ze względu na liczbę zmiennych niezależnych operatorów opisujących układy te dzielimy na:

- układy jednowymiarowe,
- układy wielowymiarowe.

Układy jednowymiarowe są opisywane operatorami jednej zmiennej niezależnej, którą zwykle jest czas ciągły (układy ciągłe) lub dyskretny (układy dyskretny). Układy wielowymiarowe są opisywane operatorami zależnymi od przynajmniej dwóch zmiennych niezależnych. Przykładem układu dwuwymiarowego jest linia długa, w której napięcie $u(x, t)$ i natężenie prądu $i(x, t)$ są zależne od czasu t i od odległości x od początku linii.

Ze względu na charakter sygnałów układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy ciągłe,
- układy dyskretny,
- układy hybrydowe (ciągło-dyskretny).

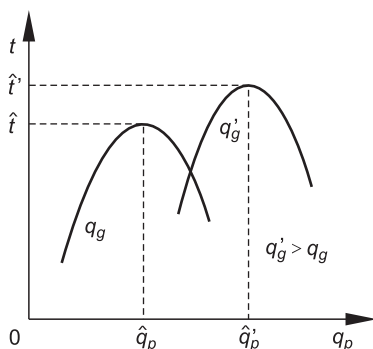
Układami ciągłymi nazywamy układy, w których sygnały mają charakter ciągły. Dynamiczne układy ciągłe są zwykle opisane równaniami różniczkowymi zwykłymi lub cząstkowymi. Układami dyskretnymi nazywamy układy,

w których sygnały mają charakter dyskretny. Dynamiczne układy dyskretne są zwykle opisane równaniami różnicowymi. W układach hybrydowych część sygnałów ma charakter ciągły, a część dyskretny. Na przykład pomiar pewnych wielkości może być dyskretny, komputer sterujący może oddziaływać na proces tylko w dyskretnych chwilach itp.

Ze względu na zadanie, jakie mają spełniać, układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy regulacji stałowartościowej (stabilizacji automatycznej),
- układy regulacji programowej,
- układy regulacji nadążnej (układy nadążne lub śledzące),
- układy regulacji ekstremalnej.

Układami regulacji stałowartościowej nazywamy układy, których wielkość zadająca $y_0(t)$ ma stałą wartość. Przykładem układu regulacji stałowartościowej jest układ regulacji automatycznej poziomu cieczy w zbiorniku (rys. 1.3) oraz temperatury w pojemniku (rys. 1.2). Układami regulacji programowej nazywamy układy, których wielkość zadająca $y_0(t)$ jest znaną z góry funkcją czasu ($y_0(t)$ zmienia się według znanego z góry programu). Przykładem układu regulacji programowej jest automatyczna obrabiarka wykonująca element o zadanym kształcie (profilu). Układami regulacji nadążnej nazywamy układy, których wielkość zadająca $y_0(t)$ nie jest znaną z góry funkcją czasu, ale zależy od zjawisk występujących na zewnątrz układu. W układzie nadążnym wielkość regulowana $y(t)$ nadąża za zmianami $y_0(t)$ (śledzi zmiany $y_0(t)$). Przykładem układu nadążnego jest radarowy układ artylerii przeciwlotniczej, śledzący ruch samolotu. Układami regulacji ekstremalnej nazywamy układy, w których wielkości regulowane przybierają wartości ekstremalne. Regulację ekstremalną stosuje się do obiektów o charakterystykach statycznych ekstremalnych, tzn. będących krzywymi mającymi maksima i minima. Przykładem charakterystyki ekstremalnej jest wykres temperatury t w komorze spalania w zależności od wartości strumienia powietrza q_p , przy ustalonej wartości strumienia gazu palnego q_g i ustalonej wartości opałowej tego gazu. Dla różnych wartości strumienia gazu palnego q_g i różnej wartości opałowej tego gazu otrzymamy różne krzywe (rys. 1.4).



Rys. 1.4. Wykres temperatury w zależności od wartości strumienia powietrza

Przy zbyt małym dopływie powietrza nie występuje całkowite spalanie gazu i część niespalonego gazu uchodzi wraz ze spalinami do komina. Jeżeli natomiast dopływ powietrza jest zbyt duży, to nadmiar powietrza niebiorącego udziału w spalaniu działa jako czynnik chłodzący. Istnieje więc wartość strumienia powietrza q_p , przy której temperatura w komorze spalania osiąga wartość największą $\hat{t}$ (rys. 1.4) (przy ustalonej wartości strumienia gazu q_g i ustalonej wartości opałowej gazu). W układzie regulacji ekstremalnej procesu spalania gazu regulator tak dobiera wartość strumienia, aby przy danej wartości strumienia gazu i danej wartości opałowej tego gazu temperatura w komorze spalania była najwyższa.

Ze względu na zdolność samoczynnego dopasowania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń układy regulacji automatycznej dzielimy na:

- układy adaptacyjne,
- układy zwykłe (nieadaptacyjne).

Układami adaptacyjnymi nazywamy układy mające zdolności samoczynnego dopasowywania parametrów i charakterystyk do zmieniających się właściwości obiektów i zakłóceń. Przykładem układu adaptacyjnego jest układ regulacji automatycznej kursu samolotu (tzw. autopilot), którego parametry samoczynnie dopasowują się do zmieniających się właściwości samolotu na skutek zmian prędkości lotu, gęstości atmosfery, oblodzenia samolotu itp.

Przyjmując za kryterium jakości (wskaźnik jakości) układów regulacji automatycznej funkcję Q , możemy układy te podzielić na:

- optymalne,
- nieoptymalne.

Układami optymalnymi nazywamy układy zapewniające ekstremalną (maksymalną lub minimalną) wartość wskaźnika jakości Q , a układami nieoptymalnymi – układy, które nie zapewniają ekstremalnej wartości tego wskaźnika.

Ze względu na sposób realizacji sterowania układy dzielimy na:

- układy jednowarstwowe,
- układy wielowarstwowe.

W układach wielowarstwowych (zwanych również układami wielopoziomymi lub hierarchicznymi) występują przynajmniej dwie warstwy (poziomy). W typowym układzie wielowarstwowym występuje warstwa stabilizacji, warstwa optymalizacji (lub adaptacji) i warstwa koordynacji. Regulator najniższej warstwy (poziomu) stabilizacji stabilizuje wielkość regulowaną na zadanym poziomie, który jest wyznaczony przez regulator warstwy optymalizacji (adaptacji). Regulator (komputer sterujący) warstwy najwyższej koordynuje współdziałanie poszczególnych regulatorów lokalnych.

1.3. Zarys treści książki i jak z niej korzystać

Książka składa się z 4 rozdziałów, 4 dodatków (*A*, *B*, *C*, *D*) i wykazu literatury. Rozdział 1 stanowi obszerne wprowadzenie w tematykę książki. Obejmuje on pojęcia podstawowe, istotę układu regulacji automatycznej, opis liniowych układów dynamicznych, metody linearyzacji układów nieliniowych oraz modele matematyczne układów dynamicznych elektrycznych, mechanicznych, elektromechanicznych, chemicznych, biologicznych i ekonomicznych. Rozdział 2 jest poświęcony modelom matematycznym liniowych układów dynamicznych ciągłych i dyskretnych w postaci równań różniczkowych, równań stanu oraz modeli AR, ARMA. Omówiono tu charakterystyki czasowe, transmitancje operatorowe i widmowe, charakterystyki częstotliwościowe oraz podstawowe człony dynamiczne.

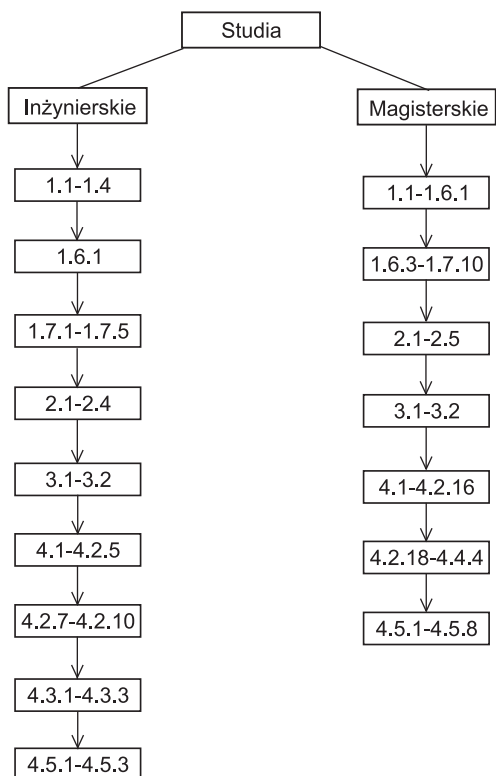
Modele matematyczne nieliniowych układów dynamicznych opisano w rozdziale 3. W rozdziale 4 wprowadzono pojęcie płaszczyzny fazowej, portretu fazowego i ich zastosowania do analizy układów nieliniowych, osiągalność, sterowalność i obserwowalność układów liniowych ciągłych i dyskretnych, zera i bieguny układów liniowych, postać Smitha i MacMillana macierzy transmitancji operatorowych oraz różne postaci kanoniczne macierzy układów liniowych.

W dodatku *A* podano podstawowe wiadomości z rachunku macierzowego, a w dodatku *B* zebrano podstawowe wiadomości dotyczące różniczkowania macierzy, równań różniczkowych i różnicowych oraz obliczania pochodnych Liego. Dodatek *C* zawiera podstawy rachunku operatorowego opartego na przekształceniu Laplace'a i przekształceniu $\mathcal{Z}$. W dodatku *D* omówiono elementy logiki i metody dowodzenia twierdzeń.

Wykładany materiał jest ilustrowany licznymi przykładami. Na końcu rozdziałów znajdują się zadania do samodzielnego rozwiązywania wraz, w większości przypadków, z odpowiedziami i wskazówkami. Książka obejmuje podstawowe zagadnienia teorii sterowania zarówno układów liniowych, jak i nieliniowych. Szczególną uwagę zwrócono na możliwość numerycznej realizacji algorytmów na komputerze, zwłaszcza w programie MATLAB.

Książka zawiera podstawy teorii sterowania i jest przeznaczona przede wszystkim dla studentów studiów inżynierskich, magisterskich i częściowo doktoranckich kierunków technicznych, takich jak elektrotechnika, elektronika i mechatronika, automatyka i robotyka, mechanika, informatyka.

Przybliżony podział materiału zgodny z programem poszczególnych rodzajów studiów pokazano na rys. 1.5. Na rysunku tym są wyodrębnione dwie ścieżki studiowania odpowiadające studiom inżynierskim i magisterskim. Słuchacz studiów doktoranckich powinien materiał tej książki traktować jako wprowadzenie do samodzielnego studiów i przewodnik po literaturze przedmiotu.



Rys. 1.5. Ścieżki studiowania

Każdy student, niezależnie od poziomu na jakim studiuje, powinien zwrócić uwagę na następujące elementy:

- sformułowanie zagadnienia,
- warunki istnienia rozwiązania zagadnienia,
- algorytmy (procedury) wyznaczania rozwiązania.

W sformułowaniu zagadnienia szczególną uwagę należy zwrócić na:

- założenia upraszczające model procesu lub zagadnienia,
- jakie wielkości lub/oraz parametry są dane (znane),
- jakie wielkości lub/oraz parametry są poszukiwane (niewiadome).

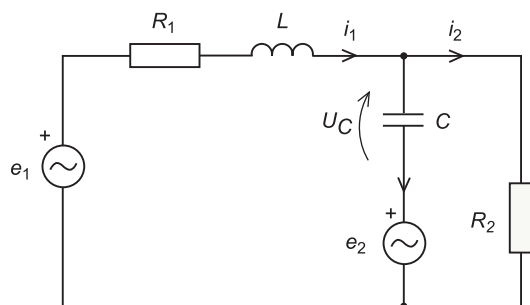
Przy formułowaniu warunków istnienia rozwiązania zagadnienia szczególną uwagę należy zwrócić na:

- czy podane warunki są tylko dostateczne, czy tylko konieczne lub wreszcie konieczne i dostateczne,
- metody dowodu tych warunków.

Algorytmy (procedury) wyznaczania rozwiązania zagadnienia jest wygodnie podawać w postaci kolejnych kroków oraz należy zwrócić uwagę na możliwość ich realizacji numerycznej na komputerze np. w programie MATLAB. Przy porównywaniu różnych algorytmów istotna jest ich ogólność, prostota i złożoność obliczeniowa.

1.4. Opis liniowych układów dynamicznych

Własności liniowych układów dynamicznych można opisywać w różny, nie zawsze równoważny, sposób. Do najczęściej stosowanego opisu zaliczamy opis za pomocą równań różniczkowych, wynikających z odpowiednich praw fizyki. Rugując z równań tych pewne zmienne, możemy otrzymać równania różniczkowe odpowiedniego rzędu, na ogół wyższego niż pierwszy, opisujące zmiany w czasie wybranej wielkości. Możemy też, wybierając odpowiednią liczbę zmiennych, równania te zapisać w postaci układu równań różniczkowych pierwszego rzędu. Pokażemy to na prostym przykładzie obwodu elektrycznego, którego schemat pokazano na rys. 1.6. W obwodzie tym dane są rezystancje R_1 , R_2 , indukcyjność L cewki, pojemność C kondensatora oraz zmienne w czasie napięcia źródłowe e_1 i e_2 .



Rys. 1.6. Schemat obwodu elektrycznego

Niech interesującymi nas wielkościami w tym obwodzie będą prądy i_1 , i_2 oraz napięcie u_C na kondensatorze. Korzystając z praw Kirchhoffa, możemy dynamikę tego obwodu opisać równaniami

$$\begin{aligned} e_1 - R_1 i_1 - L \frac{di_1}{dt} - R_2 i_2 &= 0 \\ e_2 + u_C - R_2 i_2 &= 0 \\ i_1 - i_2 - C \frac{du_C}{dt} &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Rugując z równań (1.3) prąd i_2 oraz napięcie u_C , otrzymamy równanie różniczkowe opisujące zmiany w czasie prądu i_1

$$\frac{d^2 i_1}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C} \right) \frac{di_1}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_1}{R_2 LC} \right) i_1 = \frac{e_1}{LC} - \frac{de_1}{Ldt} - \frac{de_2}{Ldt} \quad (1.4)$$

Aby wyznaczyć z równania różniczkowego (1.4) przebieg prądu i_1 , musimy znać wartości napięć źródłowych e_1 i e_2 , parametry obwodu R_1 , R_2 , L i C oraz warunki początkowe w chwili t_0

$$i_1(t_0) = i_{10}, \quad \frac{di_1}{dt} \Big|_{t=t_0} = i_{11} \quad (1.5)$$

Rugując natomiast z równań (1.3) prąd i_1 oraz prąd i_2 , otrzymamy równanie różniczkowe opisujące zmiany w czasie napięcia u_C

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} \frac{du_C}{dt} + \frac{R_2 + R_1}{R_2 LC} u_C = \\ = \frac{e_1}{LC} - \frac{R_1 + R_2}{R_2 LC} e_2 - \frac{1}{R_2 C} \frac{de_2}{dt} \end{aligned} \quad (1.6)$$

W celu wyznaczenia z równania różniczkowego (1.6) przebiegu napięcia u_C musimy znać wartości napięć źródłowych e_1 i e_2 , parametry obwodu R_1 , R_2 , L i C oraz warunki początkowe w chwili t_0

$$u_C(t_0) = u_{C0}, \quad \frac{du_C}{dt} \Big|_{t=t_0} = u_{C1} \quad (1.7)$$

Z kolei rugując z równań (1.3) prąd i_1 oraz napięcie u_C , otrzymamy równanie różniczkowe opisujące zmiany w czasie prądu i_2

$$\begin{aligned} \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \left(\frac{R_1}{L} + \frac{1}{R_2 C} \right) \frac{di_2}{dt} + \left(\frac{1}{LC} + \frac{R_1}{R_2 LC} \right) i_2 = \\ = \frac{e_1}{R_2 LC} - \frac{R_1 de_2}{R_2 Ldt} - \frac{d^2 e_2}{R_2 dt^2} \end{aligned} \quad (1.8)$$

Do wyznaczenia z równania różniczkowego (1.8) przebiegu prądu i_2 musimy znać również wartości napięć źródłowych e_1 i e_2 , parametry obwodu R_1 , R_2 , L i C oraz warunki początkowe w chwili t_0

$$i_2(t_0) = i_{20}, \quad \frac{di_2}{dt} \Big|_{t=t_0} = i_{21} \quad (1.9)$$

Zauważmy, że równanie charakterystyczne równań różniczkowych (1.4), (1.6) i (1.8) ma taką samą postać

$$s^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 LC} s + \frac{R_2 + R_1}{R_2 LC} = 0 \quad (1.10)$$

Zależy ono od struktury i parametrów R_1 , R_2 , L i C obwodu, a nie zależy od wielkości, którą wyznaczamy.

UWAGA 1. *Zauważmy, że znając wartości napięć źródłowych e_1, e_2 , parametry R_1, R_2, L i C , chwilowe napięcie u_C oraz prąd i_1 , możemy wyznaczyć dowolne napięcie i prąd w tym obwodzie.*

Na przykład z drugiego z równań (1.3) mamy $i_2 = \frac{1}{R_2}(e_2 + u_C)$. A więc znając R_2, u_C i e_2 , możemy wyznaczyć i_2 . Podobnie, znając prąd i_1 , możemy wyznaczyć napięcie na rezystorze R_1 równe $R_1 i_1$ oraz napięcie na cewce $u_L = L \frac{di_1}{dt}$.

Przyjmując za zmienne stanu napięcie u_C oraz prąd i_1 , po wyrugowaniu prądu i_2 z równań (1.3), otrzymamy układ równań różniczkowych pierwszego rzędu postaci

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.11)$$

Niech poszukiwaną wielkością w tym obwodzie będzie prąd i_2 , określony równaniem

$$i_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

Napięcie u_C oraz prąd i_1 , których znajomość wartości w dowolnej wybranej chwili t_0 , $u_C(t_0)$, $i_1(t_0)$ oraz napięć źródłowych e_1 i e_2 i parametrów obwodu R_1, R_2, L, C wystarczy do wyznaczenia dowolnych napięć i prądów w dowolnej chwili $t > t_0$, nazywamy zmiennymi stanu tego obwodu i oznaczamy przez x_1 i x_2 . Korzystając z tych zmiennych stanu, równania (1.11), (1.12) możemy napisać w postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.13)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.14)$$

przy czym

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_2 C} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R_1}{L} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R_2 C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{R_2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{R_2} \end{bmatrix}$$

a warunek początkowy ma postać

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = \begin{bmatrix} u_C(t_0) \\ i_1(t_0) \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Równanie (1.13) nazywamy równaniem stanu, a równanie (1.14) równaniem wyjścia. Znając wymuszenie $\mathbf{u}$ dla $t > t_0$ oraz warunek początkowy (1.15), możemy wyznaczyć rozwiązanie równania różniczkowego (1.13) ze wzoru

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \quad (1.16)$$

a następnie, podstawiając (1.16) do równania (1.14), wyznaczyć poszukiwaną wielkość

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (1.17)$$

Pierwsza składowa

$$\mathbf{y}_s(t) = \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-t_0)} \mathbf{x}_0 \quad (1.18)$$

określa składową swobodną, wywołaną niezerowymi warunkami początkowymi, a druga składowa

$$\mathbf{y}_w(t) = \int_0^t \mathbf{C} e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \quad (1.19)$$

składową wymuszoną wywołaną zewnętrznym wymuszeniem $\mathbf{u}$. Równanie charakterystyczne macierzy $\mathbf{A}$ rozpatrywanego obwodu ma postać

$$\det [\mathbb{I}s - \mathbf{A}] = \begin{vmatrix} s + \frac{1}{R_2 C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & s + \frac{R_1}{L} \end{vmatrix} = s^2 + \frac{R_1 R_2 C + L}{R_2 L C} s + \frac{R_1 + R_2}{R_2 L C} = 0$$

i pokrywa się z równaniem charakterystycznym (1.10) równań różniczkowych (1.4), (1.6) i (1.8).

Korzystając z analogii istniejących między obwodami elektrycznymi a układami mechanicznymi, hydraulicznymi, pneumatycznymi, biologicznymi, ekonomicznymi itp., możemy dynamikę tych układów opisać odpowiednimi równaniami różniczkowymi na podstawie odpowiednich praw rządzących tymi układami oraz dokonać redukcji niektórych zmiennych z tych równań. Wybierając odpowiednie zmienne za zmienne stanu, możemy dynamikę tych układów opisać równaniami stanu postaci (1.13), (1.14). Przechodząc do przypadku ogólnego, wprowadzamy następujące ważne pojęcia stanu: *wektora stanu* i *zmiennych stanu*.

DEFINICJA 3

Stanem układu (procesu) nazywamy zbiór liniowo niezależnych wielkości $x_1, x_2, \dots, x_n$ określających w pełni skutki przeszłych oddziaływań ($t < t_0$) na układ, który jest wystarczający do wyznaczenia przebiegów chwilowych dowolnych wielkości w tym układzie dla $t > t_0$, gdy znane są wymuszenia i parametry tego obwodu. Wielkości $x_1, x_2, \dots, x_n$ nazywamy zmiennymi stanu, a wektor $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ wektorem stanu tego układu.

Za zmienne stanu można wybrać różne wielkości w układzie. W liniowych obwodach elektrycznych najczęściej za zmienne stanu przyjmuje się napięcia na kondensatorach i prądy w cewkach. Można za zmienne stanu wybrać też ładunki ($q = C u_C$) kondensatorów i strumienie magnetyczne ($\Psi = L i$) cewek.

Własności dynamiczne układów liniowych o stałych parametrach można również opisać za pomocą transmitancji operatorowych, charakterystyk częstotliwościowych i charakterystyk czasowych. Należy podkreślić, że nie wszystkie te opisy są w pełni równoważne. Pełną informację o własnościach dynamicznych układu daje układ równań różniczkowych napisanych na podstawie praw rządzących tym układem oraz opis za pomocą równań stanu (1.13), (1.14). Często w procesie eliminacji pewnych zmiennych z układu równań różniczkowych tracimy istotne informacje o własnościach dynamicznych układu (patrz p. 4.2.11 Dekompozycja Kalmana układów liniowych).

1.5. Układy statyczne oraz dynamiczne stacjonarne i niestacjonarne

Układy (modele) można definiować różnie. Niżej są przedstawione dwie najczęściej spotykane definicje. Pierwsza z nich o charakterze ogólnym, podana przez J. Willemsa [198] nie wymaga pojęć wejścia i wyjścia i jest oparta na pojęciu zachowania (trajektorii), stąd jej nazwa – behawiorystyczna.

1.5.1. Behawiorystyczna definicja układu

Niech $\mathbb{R}$ będzie zbiorem (ciałem) liczb rzeczywistych, a $\mathbb{R}^{p \times q}$ zbiorem macierzy o wymiarach $p \times q$ i elementach ze zbioru $\mathbb{R}$. Oznaczmy literą Z zbiór liczb całkowitych, a literą Z_+ – zbiór liczb całkowitych nieujemnych, $Z_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$.

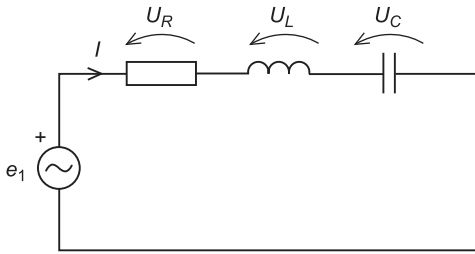
DEFINICJA 4

Układem S nazywamy następującą trójkę:

$$S := \{T, W, B\}$$

gdzie T jest zbiorem chwil czasowych, $\mathbf{W}$ jest zbiorem (przestrzenią) wartości sygnałów, za pomocą których otoczenie oddziałuje na układ i układ oddziałuje na otoczenie, $\mathbf{B}$ jest zbiorem trajektorii $\mathbf{w} := T \mapsto \mathbf{W}$ spełniających prawa rządzące tym układem i określające zachowanie tego układu.

Zbiór T jest zwykle podzbiorem (przedziałem) liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ lub liczb całkowitych $\mathbb{Z}$, np. $T = \mathbb{Z}_+$. Układ nazywamy ciągłym, jeżeli $T = \mathbb{R}$, oraz odpowiednio dyskretnym, jeżeli $T = \mathbb{Z}$. Prosty przykład ciągłego układu dynamicznego jest dwójnik RLC , pokazany na rys. 1.7.



Rys. 1.7. Schemat obwodu elektrycznego

W tym przypadku $T \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{W}$ jest zbiorem wartości, jakie przybierają napięcia na poszczególnych elementach R , L , C i natężenie prądu w tym dwójniku, a $\mathbf{B}$ jest zbiorem przebiegów czasowych tylko tych napięć u_R , u_L , u_C na elementach R , L , C oraz natężenia prądu i , które spełniają równania

$$\begin{aligned} e &= Ri + L \frac{di}{dt} + u_C, & u_R &= Ri, \\ u_L &= L \frac{di}{dt}, & u_C &= \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (1.20)$$

Szeroką klasę liniowych układów dynamicznych można opisać równaniem

$$\mathbf{R}(\rho)\mathbf{w} = 0 \quad (1.21)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(\rho) &:= \mathbf{R}_n \rho^n + \mathbf{R}_{n-1} \rho^{n-1} + \dots + \mathbf{R}_1 \rho + \mathbf{R}_0, \\ \mathbf{R}_i &\in \mathbb{R}^{p \times q}, \quad i = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$

ρ jest operatorem różniczkowania $\rho = s$, $sf = \frac{df}{dt}$, dla układów ciągłych, oraz operatorem różnicowania $\rho = z$, $zf(i) = f(i+1)$, dla układów dyskretnych, $\mathbf{W} = \mathbb{R}^q$ (zbiór q -wymiarowych wektorów o składowych ze zbioru $\mathbb{R}$), a zbiór $\mathbf{B}$ jest określony następująco:

$$\mathbf{B} := \{\mathbf{w} : T \mapsto \mathbb{R}^q \text{ spełniających równanie 1.21 dla każdego } t \in T\}$$

DEFINICJA 5

Model określony równaniem (1.21) nazywamy modelem typu AR (autoregresyjnym) układu dynamicznego.

Ważną klasę modeli układów dynamicznych tworzą modele wejściowo-wyjściowe, w których wyróżniono zbiór sygnałów wejściowych $\mathbf{U} \subset \mathbb{R}^m$ i zbiór sygnałów wyjściowych $\mathbf{Y} \subset \mathbb{R}^p$. Wielkości $u_1, u_2, \dots, u_m$, określające oddziaływanie otoczenia na układ, nazywać będziemy wymuszeniami lub sygnałami wejściowymi, a miejsca ich oddziaływania – wejściami układu.

Wielkości $y_1, y_2, \dots, y_p$, określające oddziaływanie układu na otoczenie, nazywać będziemy odpowiedziami lub sygnałami wyjściowymi, a miejsca ich oddziaływania – wyjściami układu (rys. 1.8). Tę klasę liniowych układów dynamicznych można opisać równaniem

$$\mathbf{P}(\rho)\mathbf{y} = \mathbf{Q}(\rho)\mathbf{u} \quad (1.22)$$

gdzie

$$\mathbf{P}(\rho) := \mathbf{P}_{n_1}\rho^{n_1} + \mathbf{P}_{n_1-1}\rho^{n_1-1} + \dots + \mathbf{P}_1\rho + \mathbf{P}_0,$$

$$\mathbf{P}_i \in \mathbb{R}^{k \times p}, \quad i = 0, 1, \dots, n_1$$

$$\mathbf{Q}(\rho) := \mathbf{Q}_{n_2}\rho^{n_2} + \mathbf{Q}_{n_2-1}\rho^{n_2-1} + \dots + \mathbf{Q}_1\rho + \mathbf{Q}_0,$$

$$\mathbf{Q}_i \in \mathbb{R}^{k \times m}, \quad i = 0, 1, \dots, n_2$$

$$\mathbf{u} := \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \in U \subset \mathbb{R}^m, \quad \mathbf{y} := \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} \in Y \subset \mathbb{R}^p$$

a ρ jest określone w ten sam sposób jak w równaniu (1.21).



Rys. 1.8. Schemat blokowy układu dynamicznego

DEFINICJA 6

Model określony równaniem (1.22) nazywamy modelem typu ARMA (ang. AutoRegressive Moving Average).

Na przykład równania w postaci operatorowej dwójnika RLC z rysunku 1.7 można napisać następująco

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & R + sL \\ 1 & 0 & 0 & -R \\ 0 & 1 & 0 & -sL \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{sC} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_R \\ U_L \\ U_C \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} E \quad (1.23)$$

gdzie U_R, U_L, U_C, I i E są transformatami Laplace'a odpowiednio u_R, u_L, u_C, u oraz e . W równaniu (1.23) nie są uwzględnione warunki początkowe dwójnika.

UWAGA 2. *Zauważmy, że równanie (1.22) stanowi przypadek szczególny równania (1.21) dla*

$$\mathbf{w} := \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{R}(\rho) := \mathbf{w} := [\mathbf{P}(\rho) \quad -\mathbf{Q}(\rho)]$$

1.5.2. Relacyjna definicja układu

Układ można zdefiniować, podając na przykład zależności między elementami wyróżnionych zbiorów, które charakteryzują obserwowane własności (cechy) badanego procesu (zjawiska).

DEFINICJA 7

Układem nazywamy następującą trójkę $(\mathbf{U}, \mathbf{Y}, \mathbf{F})$, gdzie $\mathbf{U}$ jest zbiorem wejść, $\mathbf{Y}$ jest zbiorem wyjść, a $\mathbf{F}$ jest zbiorem odwzorowań (operacji, funkcji, transformacji) określonych na zbiorze $\mathbf{U}$ i przyjmujących wartości w zbiorze $\mathbf{Y}$ ($\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{Y}$, $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$).

Zbiór wejść $\mathbf{U}$ obejmuje w przypadku ogólnym zbiór sterowań, zbiór zakłóceń i zbiór warunków początkowych. Układ nazywamy liniowym, jeżeli $\mathbf{U}$ i $\mathbf{Y}$ są przestrzeniami liniowymi, a $\mathbf{F}$ jest zbiorem operacji liniowych. W wypadku przeciwnym układ nazywamy nieliniowym. Układ taki nie spełnia zasady superpozycji (definicja 2). Niech $\mathbf{U} = (\mathbf{u} : T \mapsto \mathbf{W}_u)$ będzie przestrzenią funkcji określonych na zbiorze T o wartościach w zbiorze $\mathbf{W}_u$, gdzie T jest zbiorem (liniowo uporządkowanym) chwil, a $\mathbf{W}_u$ jest zbiorem wartości sterowań. Analogicznie, niech $\mathbf{Y} = (\mathbf{y} : T \mapsto \mathbf{W}_y)$ będzie przestrzenią funkcji określonych na zbiorze T o wartościach w zbiorze $\mathbf{W}_y$, gdzie $\mathbf{W}_y$ jest zbiorem wartości wyjść (odpowiedzi). Jeżeli T jest półprostą lub odcinkiem osi liczb rzeczywistych, to układ taki nazywamy układem ciągłym (dokładniej ciągłym w czasie), a jeżeli T jest zbiorem liczb całkowitych lub liczb całkowitych nieujemnych, to układ nazywamy układem dyskretnym (dokładniej dyskretnym w czasie). Układ nazywamy statycznym wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $\bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{W}_u$ zachodzi

$\bar{y} = f(\bar{u}) \in W_y$. W układzie statycznym wartość odpowiedzi $\bar{y}$ w chwili t zależy wyłącznie od wartości wymuszenia $\bar{u}$ w tej samej chwili, nie zależy natomiast od wymuszeń w innych chwilach oraz warunków początkowych układu. Przykładem układu statycznego jest czwórnik złożony tylko z rezystancji niezależnych od czasu. Wyjście (odpowiedź) tego czwornika w każdej chwili zależy tylko od wejścia (wymuszenia) w tej samej chwili.

DEFINICJA 8

Układem dynamicznym nazywamy następującą trójkę (U, X, Y, f_1, f_2) , przy czym U jest przestrzenią sterowań, $U = (u : T \mapsto W_u)$, T jest zbiorem chwil, W_u jest zbiorem wartości sterowań, X jest przestrzenią stanów, $Y = (y : T \mapsto W_y)$ jest przestrzenią odpowiedzi, W_y jest zbiorem wartości odpowiedzi, $f_1 : X \times U \times T \times T \mapsto X$ jest funkcją przejścia stanu w stan, a $f_2 : X \times W_u \times T \mapsto W_y$ jest funkcją wyjścia (odpowiedzi).

Jeżeli dany jest stan początkowy $x(t_0) = x_0$ ($t_0 \in T$ jest chwilą początkową) oraz chwilowe wartości sterowania $u(t)$ dla $t \geq t_0$, to stan układu $x(t)$ jest określony zależnością

$$\dot{x}(t) = f_1(x_0, u(t), t_0, t), \quad t \geq t_0 \quad (1.24)$$

a odpowiedź układu $y(t)$ odpowiednio zależnością

$$y(t) = f_2(x(t), u(t), t), \quad t \geq t_0 \quad (1.25)$$

Równanie (1.24) określa stan układu, a równanie (1.25) odpowiedź (wyjście) układu dynamicznego.

Trajektorią układu na odcinku $[t_0, t_1]$ nazywamy następujący podzbiór iloczynu kartezjańskiego $X \times T \setminus \{(x(t), t) \in X \times T, t \in [t_0, t_1]\}$, a trajektorią fazową układu na odcinku $[t_0, t_1]$ nazywamy podzbiór $\{x(t) \in X, t \in [t_0, t_1]\}$. Trajektorja fazowa jest więc rzutem trajektorii układu na przestrzeń stanu X . Układ dynamiczny nazywamy liniowym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_1(ax_1 + bx_2, au_1 + bu_2, t_1, t_2) = af_1(x_1, u_1, t_1, t_2) + bf_1(x_2, u_2, t_1, t_2) \quad (1.26)$$

dla $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $u_1, u_2 \in U$, $t_1, t_2 \in T$ oraz

$$f_2(ax_1 + bx_2, a\bar{u}_1 + b\bar{u}_2, t) = af_2(x_1, \bar{u}_1, t) + bf_2(x_2, \bar{u}_2, t) \quad (1.27)$$

dla $a, b \in \mathbb{R}$, $x_1, x_2 \in X$, $\bar{u}_1, \bar{u}_2 \in U$, $t \in T$. Układ dynamiczny nazywamy stacjonarnym wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f_1(x, u, t_1 + \tau, t_2 + \tau) = f_1(x, u, t_1, t_2) \quad (1.28)$$

dla $x \in X, u \in U, t_1, t_2, \tau \in T$

oraz

$$\mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, t + \tau) = \mathbf{f}_2(\mathbf{x}, \bar{\mathbf{u}}, t) \quad \text{dla} \quad \mathbf{x} \in \mathbf{X}, \quad \bar{\mathbf{u}} \in \mathbf{W}_u, \quad t, \tau \in T \quad (1.29)$$

W wypadku przeciwnym układ dynamiczny nazywamy niestacjonarnym. W układzie niestacjonarnym funkcje $\mathbf{f}_1$ i $\mathbf{f}_2$ zależą jawnie od zmiennej t (parametry układu zależą od czasu). Przykładem układu dynamicznego stacjonarnego jest obwód przedstawiony na rys. 1.6. Jeżeli rezystancja R (lub indukcyjność L , pojemność C) zależałaby od czasu t , to obwód ten byłby przykładem układu dynamicznego niestacjonarnego.

1.6. Linearyzacja układów nieliniowych

Linearyzacją układów nieliniowych nazywamy zastąpienie układu nieliniowego jego liniowym przybliżeniem. Liniowe przybliżenie układu nieliniowego powinno możliwie dobrze odwzorowywać własności statyczne i dynamiczne układu nieliniowego. Niżej są omówione następujące trzy podstawowe metody linearyzacji układów nieliniowych:

- metoda rozwinięcia w szereg,
- metoda linearyzacji optymalnej,
- metoda nieliniowego sprzężenia zwrotnego.

1.6.1. Metoda rozwinięcia w szereg

Metoda ta polega na rozwinięciu prawych stron równań stanu układu nieliniowego w szereg Taylora i pominięciu członów nieliniowych tego rozwinięcia.

Weźmy pod uwagę układ nieliniowy opisany równaniami

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \quad (1.30)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \quad (1.31)$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^p$ są odpowiednio wektorami stanu, wymuszenia i odpowiedzi, a

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ f_n(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ g_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \vdots \\ g_p(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{bmatrix} \quad (1.32)$$

są nieliniowymi funkcjami wektorowymi różniczkowalnymi ciągle względem wektorów $\mathbf{x}$ i $\mathbf{u}$. Niech $(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u, \mathbf{y}_u)$ będzie ustalonym (nominalnym) punktem pracy układu (1.30), (1.31), tzn.

$$\dot{\mathbf{x}}_n = \mathbf{f}(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u, t), \quad \mathbf{y}_n = \mathbf{g}(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u, t) \quad (1.33)$$

lub punktem równowagi ($\mathbf{f}(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u) = 0$). Ponadto niech

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_u, \quad \Delta \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_u, \quad \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{y}_u \quad (1.34)$$

będą odpowiednio małymi odchyleniami wektorów stanu, wymuszenia i odpowiedzi od ich wartości ustalonych. Biorąc pod uwagę, że

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \dot{\mathbf{x}}_u = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u, t) \quad (1.35)$$

oraz rozwijając w szereg Taylora prawe strony równań (1.30), (1.31) w małym otoczeniu punktu $(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u)$, otrzymamy

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\mathbf{x}} = \dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f}(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u, t) &= \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{R}_f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \\ &= \mathbf{A}(t) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{R}_f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{y} = \mathbf{y} - \mathbf{g}(\mathbf{x}_u, \mathbf{u}_u, t) &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \Delta \mathbf{x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \Delta \mathbf{u} + \mathbf{R}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \\ &= \mathbf{C}(t) \Delta \mathbf{x} + \mathbf{D}(t) \Delta \mathbf{u} + \mathbf{R}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (1.37)$$

przy czym

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial u_m} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial u_m} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \quad (1.39)$$

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial g_p}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_p}{\partial x_n} \end{bmatrix} \bigg|_{\substack{\mathbf{x}=\mathbf{x}_u \\ \mathbf{u}=\mathbf{u}_u}} \quad (1.40)$$

$$D(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial g_p}{\partial u_1} & \cdots & \frac{\partial g_p}{\partial u_m} \end{bmatrix}_{\substack{x=x_u \\ u=u_u}} \quad (1.41)$$

są macierzami w przypadku ogólnym o elementach zależnych od czasu t , a $\mathbf{R}_f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ i $\mathbf{R}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ są nieliniowymi członami rozwinięć spełniającymi warunki

$$\lim_{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{R}_f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0, \quad \lim_{\|\Delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{R}_f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\|}{\|\Delta \mathbf{u}\|} = 0 \quad (1.42)$$

$$\lim_{\|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{R}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\|}{\|\Delta \mathbf{x}\|} = 0, \quad \lim_{\|\Delta \mathbf{u}\| \rightarrow 0} \frac{\|\mathbf{R}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)\|}{\|\Delta \mathbf{u}\|} = 0 \quad (1.43)$$

W przypadku stacjonarnego układu nieliniowego, gdy funkcje $\mathbf{f}$ i $\mathbf{g}$ nie zależą jawnie od czasu t , macierze (1.38)÷(1.41) są stałe, niezależne od czasu, tzn. $\mathbf{A}(t) = \mathbf{A}$, $\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}$, $\mathbf{C}(t) = \mathbf{C}$, $\mathbf{D}(t) = \mathbf{D}$.

Układ liniowy

$$\Delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\Delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\Delta \mathbf{u} \quad (1.44)$$

$$\Delta \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\Delta \mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\Delta \mathbf{u} \quad (1.45)$$

otrzymany z (1.36), (1.37) przez pominięcie członów nieliniowych $\mathbf{R}_f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ i $\mathbf{R}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ nazywamy liniowym przybliżeniem układu nieliniowego (1.30), (1.31). Równania (1.44), (1.45) piszemy zwykle w postaci

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (1.46)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (1.47)$$

przyjmując, że $\mathbf{x}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{y}$ oznaczają małe odchylenia wektorów od ich wartości ustalonych (nominalnych).

PRZYKŁAD 1

Dla układu nieliniowego

$$\dot{x}_1 = -2x_1 - 1 + e^{x_2} + u \quad (1.48)$$

$$\dot{x}_2 = -3x_2 + x_1x_2 + x_2^3 + u^2 \quad (1.49)$$

$$y = x_2 + 2u \quad (1.50)$$

wyznamy liniowe przybliżenie dla następujących dwóch przypadków:

a) dla punktu

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_u = 0$$

b) stanu ustalonego układu zlinearyzowanego dla $\mathbf{u}_u = 1$.

W tym przykładzie

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ f_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2x_1 - 1 + e^{x_2} + u \\ -3x_2 + x_1x_2 + x_2^3 + u^2 \end{bmatrix}, \quad g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = x_2 + 2u$$

Przypadek a. Korzystając z zależności (1.38)÷(1.41) i (1.48)÷(1.50), otrzymamy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ \mathbf{u}=0}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ \mathbf{u}=0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ \mathbf{u}=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]_{\substack{\mathbf{x}=0 \\ \mathbf{u}=0}} = 2$$

Poszukiwane przybliżenie liniowe układu nieliniowego (1.48)÷(1.50) ma więc postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u \quad (1.51)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u \quad (1.52)$$

Przypadek b. Macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

ma wartości własne $s_1 = -2$, $s_2 = -3$. Liniowe przybliżenie (1.51), (1.52) jest więc stabilne asymptotycznie. Wektor stanu w stanie ustalonym dla $\mathbf{u}_u = 1$ jest równy

$$\mathbf{x}_u = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{u}_u = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.53)$$

Korzystając z zależności (1.38)÷(1.41) i (1.48)÷(1.50), otrzymamy macierze liniowe przybliżenia dla

$$\mathbf{x}_u = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u}_u = 1$$

Otrzymamy wtedy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \end{bmatrix}_{\substack{x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \left[\frac{\partial g}{\partial u} \right]_{\substack{x_1=-\frac{1}{2} \\ x_2=0}} = 2$$

Macierze $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są takie same jak w przypadku a, inna jest tylko macierz $\mathbf{B}$. Poszukiwane przybliżenie ma więc postać

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u \quad (1.54)$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + 2u \quad (1.55)$$

□

Metodę tę można stosować również do linearyzacji nieliniowych układów dyskretnych.

1.6.2. Metoda optymalnej linearyzacji

Metoda ta polega na takim doborze elementów macierzy liniowego przybliżenia, aby błąd średniokwadratowy różnicy między układem nieliniowym a jego liniowym przybliżeniem dla całego okresu stanu przejściowego był minimalny.

Niech

$$\hat{\mathbf{A}} = [\hat{a}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, n}}, \quad \hat{\mathbf{B}} = [\hat{b}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}, \quad (1.56)$$

$$\hat{\mathbf{C}} = [\hat{c}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, n}}, \quad \hat{\mathbf{D}} = [\hat{d}_{ij}]_{\substack{i=1, \dots, p \\ j=1, \dots, m}}$$

będą stałymi (niezależnymi od czasu) poszukiwanymi macierzami optymalnego liniowego przybliżenia (1.46), (1.47) układu nieliniowego (1.30), (1.31). Elementy tych macierzy dobieramy tak, aby błąd średniokwadratowy różnicy między układem nieliniowym (1.30), (1.31) a jego liniowym przybliżeniem (1.46), (1.47)

dla całego okresu stanu przejściowego T był minimalny, tzn.

$$\min_{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}} J_1(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}) = \min_{\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}}} \left\{ \int_0^T |\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)|^2 dt \right\} \quad (1.57)$$

$$\min_{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}} J_1(\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}) = \min_{\hat{\mathbf{C}}, \hat{\mathbf{D}}} \left\{ \int_0^T |\mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} - \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)|^2 dt \right\} \quad (1.58)$$

Dalsze szczegółowe rozważania przeprowadzimy tylko dla przypadku wyznaczania macierzy $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$, gdyż rozważania dla macierzy $\hat{\mathbf{C}}$ i $\hat{\mathbf{D}}$ są analogiczne. Wskaźnik jakości przybliżenia $J_1(\hat{\mathbf{A}}, \hat{\mathbf{B}})$ dla $\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \mathbf{f}$ możemy napisać w postaci

$$\begin{aligned} J_1(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \int_0^T |\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{f}|^2 dt = \\ &= \int_0^T [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{f}]^T [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} - \mathbf{f}] dt = \int_0^T (\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x} + \\ &+ \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{B} \mathbf{u} + \mathbf{f}^T \mathbf{f} + 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{u} - 2\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} - 2\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{f}) dt \end{aligned} \quad (1.59)$$

gdyż $\mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{A} \mathbf{x}$ i $\mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{f} = \mathbf{f}^T \mathbf{B} \mathbf{u}$. Z warunku koniecznego minimalizacji wskaźnika (1.59)

$$\frac{\partial J_1(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{\partial \mathbf{A}}_{\mathbf{A}=\hat{\mathbf{A}}} = 0, \quad \frac{\partial J_1(\mathbf{A}, \mathbf{B})}{\partial \mathbf{B}}_{\mathbf{B}=\hat{\mathbf{B}}} = 0 \quad (1.60)$$

otrzymamy

$$\hat{\mathbf{A}} \int_0^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T dt = \int_0^T \mathbf{f} \mathbf{x}^T dt - \mathbf{B} \int_0^T \mathbf{u} \mathbf{x}^T dt \quad (1.61)$$

$$\hat{\mathbf{B}} \int_0^T \mathbf{u} \mathbf{u}^T dt = \int_0^T \mathbf{f} \mathbf{u}^T dt - \mathbf{A} \int_0^T \mathbf{x} \mathbf{u}^T dt \quad (1.62)$$

gdyż

$$\frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{x}}{\partial \mathbf{A}} = 2\mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{B} \mathbf{u}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{B} \mathbf{u} \mathbf{x}^T, \quad \frac{\partial \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{f}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{f} \mathbf{x}^T \quad (1.63)$$

Rozwiązując równania (1.61), (1.62) względem $\hat{\mathbf{A}}$ i $\hat{\mathbf{B}}$, otrzymamy

$$\hat{\mathbf{A}} = \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{B} \mathbf{u}) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{x} \mathbf{x}^T dt \right]^{-1} \quad (1.64)$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{A} \mathbf{x}) \mathbf{u}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{u} \mathbf{u}^T dt \right]^{-1} \quad (1.65)$$

We wzorach (1.64) i (1.65) po prawej stronie na miejsce macierzy $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ oraz wektora $\mathbf{x}$ podstawiamy odpowiednie macierze i wektor $\mathbf{x}$ otrzymane metodą rozwinięcia w szereg. Wykażemy, że jeżeli składowe wektora $\mathbf{x}(\mathbf{u})$ są liniowo

niezależne, to macierz

$$\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt \quad \left(\int_0^T \mathbf{u}\mathbf{u}^T dt \right) \quad (1.66)$$

jest nieosobliwa.

Jeżeli składowe wektora $\mathbf{x}$ są liniowo niezależne, to dla każdego niezerowego wektora $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^n$ funkcje $v(t) = \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x}(t)$ nie są tożsamościowo równe zeru na przedziale $[0, T]$ i forma kwadratowa zbudowana na macierzy (1.66) jest dodatnio określona, gdyż

$$\boldsymbol{\alpha}^T \left[\int_0^T \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)dt \right] \boldsymbol{\alpha} = \int_0^T \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\boldsymbol{\alpha}dt = \int_0^T v^2(t)dt > 0$$

Z założenia składowe wektora $\mathbf{x}$ (zmienne stanu) oraz składowe wektora $\mathbf{u}$ są liniowo niezależne. Tak więc macierze (1.66) są nieosobliwe. Wychodząc z zależności (1.58), w analogiczny sposób jak dla zależności (1.57) otrzymamy

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_0^T (\mathbf{g} - \mathbf{D}\mathbf{u})\mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt \right]^{-1} \quad (1.67)$$

$$\hat{\mathbf{D}} = \int_0^T (\mathbf{g} - \mathbf{C}\mathbf{x})\mathbf{u}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{u}\mathbf{u}^T dt \right]^{-1} \quad (1.68)$$

Z powyższych rozważań wynika następująca procedura wyznaczania optymalnego przybliżenia układu nieliniowego.

PROCEDURA 1

Krok 1. Korzystając z zależności (1.38)÷(1.41), wyznaczamy liniową aproksymację (1.44), (1.45) układu nieliniowego (1.30), (1.31).

Krok 2. Korzystając ze wzoru

$$\mathbf{x}(t) = e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}\mathbf{u}(\tau)d\tau \quad (1.69)$$

wyznaczamy rozwiązanie równania (1.44) spełniające warunek początkowy $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ (taki sam jak dla układu nieliniowego (1.30), (1.31)).

Krok 3. Korzystając ze wzorów (1.64), (1.65), (1.67), (1.68), wyznaczamy poszukiwane macierze $\hat{\mathbf{A}}$, $\hat{\mathbf{B}}$, $\hat{\mathbf{C}}$, $\hat{\mathbf{D}}$ optymalnego przybliżenia.

PRZYKŁAD 2

Dla układu nieliniowego

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} -2x_1 + 2x_1x_2 + u^2 \\ -2x_2 + u \end{bmatrix}$$

$$g = x_2 + u$$

wyznamy optymalne przybliżenie liniowe w otoczeniu punktu stanu ustalonego dla $u = 1$, $T = 1$ i zerowych warunków początkowych.

Korzystając z procedury 1, otrzymamy kolejno:

Krok 1. Liniowe przybliżenie dla zerowych warunków początkowych ma postać

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 1], \quad D = 1$$

a dla stanu ustalonego otrzymamy

$$\mathbf{x}_u = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}u = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [0 \ 1], \quad D = 1$$

Krok 2. Dla macierzy

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

mamy

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t e^{\mathbf{A}\tau} \mathbf{B}u(t-\tau) d\tau = \begin{bmatrix} 1 - e^{-2t} \\ 1 - \frac{1}{2}e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Krok 3. Korzystając ze wzorów (1.64)÷(1.68) oraz biorąc pod uwagę, że

$$\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} e^{-4t} - e^{-2t} + 1 \\ e^{-2t} - 1 \end{bmatrix}$$

$$g(t) = -\frac{1}{2}e^{-2t} + 2$$

$$\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt = \begin{bmatrix} 0,664 & -0,46 \\ -0,46 & 0,38 \end{bmatrix}$$

otrzymamy

$$\hat{\mathbf{A}} = \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{B}u) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt \right]^{-1} = \begin{bmatrix} -16,59 & -22,48 \\ -22,75 & -30,78 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{B}} = \int_0^T (\mathbf{f} - \mathbf{A}\mathbf{x}) u^T dt \left[\int_0^T uu^T dt \right]^{-1} = \begin{bmatrix} 1,95 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{C}} = \int_0^T (g - D\mathbf{x}) \mathbf{x}^T dt \left[\int_0^T \mathbf{x}\mathbf{x}^T dt \right]^{-1} = [11,37 \ -15,39]$$

$$\hat{D} = \int_0^T (g - \mathbf{C}\mathbf{x}) u^T dt \left[\int_0^T uu^T dt \right]^{-1} = 1$$

□

1.6.3. Metoda nieliniowego sprzężenia zwrotnego

Metoda ta polega na odpowiedniej zamianie zmiennych i doborze nieliniowego sprzężenia zwrotnego. Weźmy pod uwagę układ nieliniowy o wymuszeniu skalarnym u i odpowiedzi skalarnej y opisany równaniami

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{g}(\mathbf{x})u \quad (1.70)$$

$$y = h(\mathbf{x}) \quad (1.71)$$

gdzie $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ jest wektorem stanu.

Niech dla tego układu istnieje gładkie przekształcenie zmiennych stanu $\mathbf{z} = \mathbf{P}(\mathbf{x})$ takie, że

$$\dot{z}_1 = z_2, \quad \dot{z}_2 = z_3, \quad \dots, \quad \dot{z}_{n-1} = z_n, \quad \dot{z}_n = a(\mathbf{z}) + b(\mathbf{z})u \quad (1.72)$$

gdzie $a(\mathbf{z})$ i $b(\mathbf{z})$ są skalarnymi funkcjami wektora $\mathbf{z} = [z_1, z_2, \dots, z_n]^T$. Przyjmując sprzężenie zwrotne w postaci

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{z})} (v - a(\mathbf{z})) \quad (v - \text{nowe wymuszenie}) \quad (1.73)$$

z zależności (1.72) otrzymamy następujący układ liniowy

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \vdots \\ \dot{z}_{n-1} \\ \dot{z}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_{n-1} \\ z_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} v$$

czyli

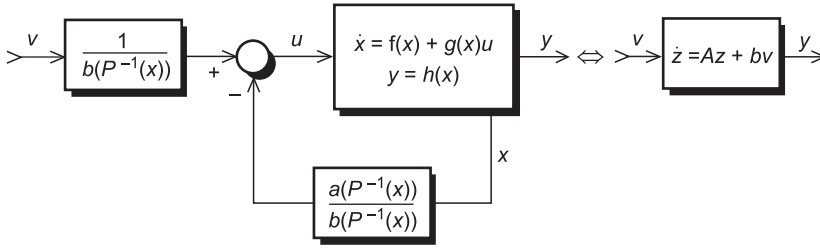
$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{b}v \quad (1.74)$$

gdzie

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Podstawiając $\mathbf{z} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x})$ do (1.73), otrzymamy poszukiwane sprzężenie zwrotne

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}))} (v - a(\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{x}))) \quad (1.75)$$



Rys. 1.9. Schemat blokowy układu z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym

Łatwo sprawdzić, że para $(\mathbf{A}, \mathbf{b})$ jest sterowalna (patrz definicja 67 na s. 228). Otrzymany układ z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym (1.75) we współrzędnych $z_1, z_2, \dots, z_n$ jest sterowalnym układem liniowym (rys. 1.9).

PRZYKŁAD 3

Dany jest układ nieliniowy

$$\dot{x}_1 = ax_1^2 + x_2 \quad (1.76)$$

$$\dot{x}_2 = -2a^2x_1^3 - 2ax_1x_2 + ax_1x_2^2 + u \quad (1.77)$$

$$y = x_1 \quad (1.78)$$

Nowe zmienne wybieramy $z_1 = x, z_2 = ax_1^2 + x_2$, czyli

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ ax_1^2 + x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{x})$$

Przekształcenie to jest odwracalne, gdyż $x_1 = z_1, x_2 = z_2 - az_1^2$, czyli

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 - az_1^2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}^{-1}(\mathbf{z})$$

Układ nieliniowy (1.76)÷(1.78) w nowych zmiennych przyjmuje postać

$$\dot{z}_1 = \dot{x}_1 = ax_1^2 + x_2 = z_2$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= 2ax_1\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = 2ax_1(ax_1^2 + x_2) - 2a^2x_1^3 - 2ax_1x_2 + ax_1x_2^2 + u = \\ &= az_1(z_2 - az_1^2)^2 + u \end{aligned}$$

czyli

$$\dot{z}_1 = z_2 \quad (1.79)$$

$$\dot{z}_2 = az_1(z_2 - az_1^2)^2 + u, \quad a(\mathbf{z}) = az_1(z_2 - az_1^2)^2, \quad b(\mathbf{z}) = 1 \quad (1.80)$$

$$y = z_1 \quad (1.81)$$

Zgodnie z zależnością (1.75) poszukiwane sprzężenie zwrotne ma postać

$$u = \frac{1}{b(\mathbf{z})} (v - a(\mathbf{z})) = v - az_1(z_2 - az_1^2)^2 = v - ax_1x_2^2 \quad (1.82)$$

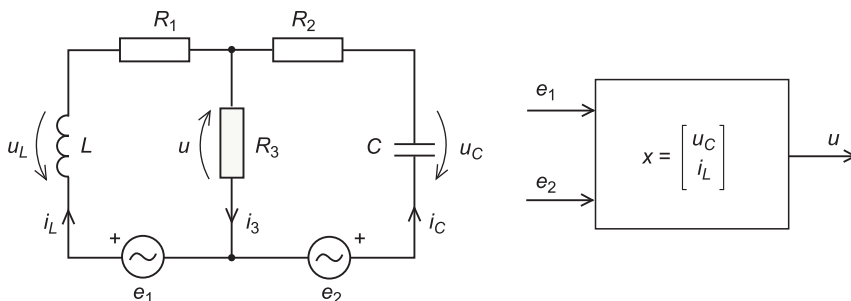
Układ nieliniowy (1.76)÷(1.78) z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym (1.82) we współrzędnych z_1, z_2 jest układem liniowym opisanym równaniami $\dot{z}_1 = z_2, \dot{z}_2 = v, y = z_1$. $\square$

1.7. Modele układów dynamicznych

Przystępując do budowy modelu matematycznego danego procesu (układu), czyli do napisania równań matematycznych opisujących ten proces, należy przede wszystkim sprecyzować wszystkie założenia upraszczające, określić zakresy zmian poszczególnych parametrów i wielkości oraz dokonać wyboru zmiennych opisujących ten proces. Należy podkreślić, że wybór tych zmiennych nie jest jednoznaczny, istnieje wiele równoważnych sposobów wyboru zmiennych opisujących rozpatrywany proces. Następnie korzystając z odpowiednich praw fizyki (takich jak podstawowe prawa mechaniki, prawa obwodów elektrycznych, równania bilansu masy i energii), chemii, biologii, ekonomii itd., piszemy równania wiążące zmiany w czasie procesów, zachodzące pod wpływem zewnętrznych oddziaływań lub nagromadzonej w układzie energii (niezerowych warunków początkowych lub brzegowych). W przypadku układów złożonych z elementów o różnej naturze fizycznej, np. układów elektromechanicznych, przy wypisywaniu równań dynamiki wygodnie jest skorzystać z zasady Hamiltona, zwanej również zasadą ekstremum działania. Sposoby układania równań dynamiki opisujących układy o parametrach skupionych i rozłożonych objaśnimy na prostych przykładach tych układów o różnej naturze fizycznej (elektrycznej, mechanicznej, elektromechanicznej) występujących w technice, biologii, ekonomii itp.

1.7.1. Układy elektryczne

W układach (obwodach) elektrycznych nieliniowych za zmienne stanu wygodnie jest przyjąć ładunki na kondensatorach i strumienie skojarzone cewek, a w liniowych — napięcia na kondensatorach i prądy w cewkach.



Rys. 1.10. Obwód elektryczny: schemat elektryczny i schemat blokowy

Metodą bezpośrednią układania równań dynamiki układów elektrycznych jest metoda oparta na pierwszym i drugim prawie Kirchhoffa. Metoda ta polega na napisaniu na podstawie praw Kirchhoffa odpowiednich równań i przekształceniu ich do postaci równań stanu. Istotę tej metody objaśnimy na przykładzie obwodu elektrycznego, którego schemat podano na rys. 1.10. Za zmienne stanu przyjmujemy napięcie u_C na kondensatorze i prąd i_L w cewce, a za odpowiedź — napięcie u na oporniku o rezystancji R_3 . Wymuszeniami w tym obwodzie są napięcia źródłowe e_1 i e_2 . Na podstawie pierwszego i drugiego prawa Kirchhoffa dla obwodu tego możemy napisać równania

$$i_L + i_C - i_3 = 0 \quad (1.83)$$

$$e_1 - L \frac{di_L}{dt} - R_1 i_L - R_3 i_3 = 0 \quad (1.84)$$

$$e_2 - u_C - R_2 i_C - R_3 i_3 = 0 \quad (1.85)$$

Biorąc pod uwagę, że

$$i_C = C \frac{du_C}{dt} \quad (1.86)$$

oraz korzystając z równania (1.83), rugujemy z równań (1.84) i (1.85) prądy i_C i i_3 . Otrzymamy wówczas

$$e_1 - L \frac{di_L}{dt} - R_1 i_L - R_3 \left(i_L + C \frac{du_C}{dt} \right) = 0 \quad (1.87)$$

$$e_2 - u_C - R_2 C \frac{du_C}{dt} - R_3 \left(i_L + C \frac{du_C}{dt} \right) = 0 \quad (1.88)$$

Z równania (1.88) mamy

$$\frac{du_C}{dt} = - \frac{1}{(R_2 + R_3)C} u_C - \frac{R_3}{(R_2 + R_3)C} i_L + \frac{1}{(R_2 + R_3)C} e_2 \quad (1.89)$$

Podstawiając zależność (1.89) do równania (1.87), otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{di_L}{dt} = & \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} u_C - \frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2 R_3}{(R_2 + R_3)L} i_L + \\ & + \frac{1}{L} e_1 - \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} e_2 \end{aligned} \quad (1.90)$$

Zapisując równania (1.89), (1.90) w postaci jednego równania macierzowego, otrzymamy

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_2 + R_3)C} & -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)C} \\ \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} & -\frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3}{(R_2 + R_3)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(R_2 + R_3)C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.91)$$

Z porównania równania (1.91) z równaniem $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$ wynika, że w tym przypadku $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix}$, macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są równe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_2 + R_3)C} & -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)C} \\ \frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} & -\frac{R_1(R_2 + R_3) + R_2R_3}{(R_2 + R_3)L} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{(R_2 + R_3)C} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_3}{(R_2 + R_3)L} \end{bmatrix}$$

Aby wyznaczyć równanie wyjścia $y = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u}$ oraz elementy macierzy $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ dla tego obwodu, na podstawie drugiego prawa Kirchhoffa, piszemy równanie

$$u = -u_C - R_2C \frac{du_C}{dt} + e_2 \quad (1.92)$$

Podstawiając zależność (1.89) do równania (1.92), otrzymamy następujące równanie wyjścia

$$u = -\frac{R_3}{R_2 + R_3}u_C + \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3}i_L + \frac{R_3}{R_2 + R_3}e_2$$

W tym przypadku macierze $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są równe

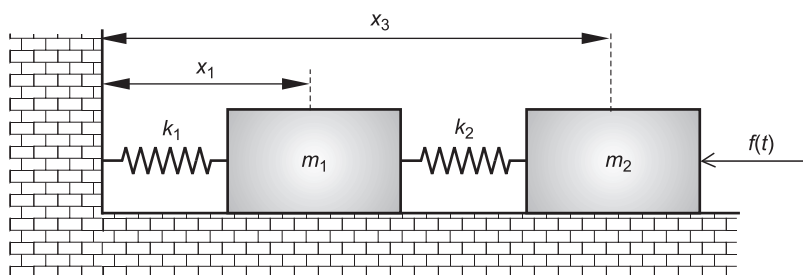
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{R_3}{R_2 + R_3} & \frac{R_2R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{R_3}{R_2 + R_3} \end{bmatrix}$$

W wielu przypadkach metodą wygodniejszą i szybszą od omówionej wyżej metody bezpośredniej, jest metoda włączania idealnych źródeł napięcia i prądu, podana w [115].

1.7.2. Układy mechaniczne

W układach mechanicznych za zmienne stanu wygodnie jest przyjąć współrzędne określające położenia poszczególnych ciał oraz prędkości tych ciał. Metodą bezpośrednią układania równań dynamiki układów mechanicznych jest metoda oparta na prawach Newtona (lub na zasadzie d’Alamberta).



Rys. 1.11. Układ mechaniczny złożony z dwóch ciał o masach m_1 i m_2 oraz z dwóch sprężyn

Metoda ta polega na napisaniu na podstawie praw Newtona odpowiednich równań i przekształceniu tych równań do postaci równań zmiennych stanu. Istotę tej metody objaśnimy na przykładzie prostego układu mechanicznego, złożonego z dwóch ciał o masach odpowiednio m_1 i m_2 i dwóch sprężyn o współczynnikach sprężystości k_1 i k_2 (rys. 1.11). Zakładamy, że na ciało o masie m_2 działa siła zewnętrzna $f(t)$, a opory tarcia ciał są proporcjonalne do prędkości, przy czym r_1 i r_2 są współczynnikami tarcia odpowiednio ciała o masie m_1 i m_2 . Wymuszeniem w tym przypadku jest siła zewnętrzna $f(t)$, a za zmienne stanu przyjmujemy:

x_1 – współrzędną określającą położenie ciała o masie m_1 ,

x_2 – prędkość ciała o masie m_1 ($x_2 = \dot{x}_1$),

x_3 – współrzędną określającą położenie ciała o masie m_2 ,

x_4 – prędkość ciała o masie m_2 ($x_4 = \dot{x}_3$).

Niech wektorem odpowiedzi $\mathbf{y}$ będzie

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę siły działające na poszczególne ciała, na podstawie drugiego prawa Newtona (lub zasady d’Alamberta) możemy napisać równania

$$m_1 \dot{x}_2 + r_1 x_2 + k_1 x_1 + k_2 (x_1 - x_3) = 0 \quad (1.93)$$

$$m_2 \dot{x}_4 + r_2 x_4 + k_2 (x_3 - x_1) = f(t) \quad (1.94)$$

Uwzględniając, że $\dot{x}_1 = x_2$ i $\dot{x}_3 = x_4$ oraz przekształcając równania (1.93), (1.94) w równania zmiennych stanu, otrzymamy

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{r_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{r_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} f(t)$$

W tym przypadku macierze $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ są równe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & -\frac{r_1}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k_2}{m_2} & 0 & -\frac{k_2}{m_2} & -\frac{r_2}{m_2} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}$$

Równanie wyjścia ma postać

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

a macierze $\mathbf{C}$ i $\mathbf{D}$ są równe

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = 0$$

1.7.3. Układy elektromechaniczne

Układając równania dynamiki układów złożonych, wygodnie jest skorzystać z zasady Hamiltona. Zgodnie z tą zasadą układ holonomiczny i zachowawczy (układ, w którym nie występuje rozpraszanie energii oraz energia nie jest dostarczana do układu) jest określony funkcją skalarną L , zwaną funkcją Lagrange'a, współrzędnych uogólnionych $q_1, q_2, \dots, q_n$, prędkości uogólnionych $\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$ i czasu t

$$L = L(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n, t)$$

Funkcja ta jest różnicą energii kinetycznej T i energii potencjalnej U układu

$$L = T - U$$

W myśl zasady Hamiltona ruch układu (przejście z jednego położenia w drugie) przebiega tak, aby funkcjonał

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L dt \quad (1.95)$$

przyjmował wartość ekstremalną, zwykle minimalną. Funkcjonał (1.95) osiąga ekstremum wtedy, gdy są spełnione równania Lagrange'a w postaci

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n \quad (1.96)$$

lub

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^T} = 0$$

przy czym $\mathbf{q}$ jest wektorem o składowych $q_1, q_2, \dots, q_n$, a T oznacza transpozycję wektora.

W przypadku ogólnym, gdy do układu jest dostarczana energia i występuje rozpraszanie energii, układ jest określony dwiema funkcjami skalarnymi: funkcją Lagrange'a i funkcją Rayleigha F , będącą różnicą energii rozproszonej w układzie F_r i energii F_d dostarczonej do układu

$$F = F_r - F_d$$

W tym przypadku równania Lagrange'a przyjmują postać

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}_i} = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, n$$

lub

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} \right) - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}^T} + \frac{\partial F}{\partial \dot{\mathbf{q}}^T} = 0$$

Sposób korzystania z równań Lagrange'a przy układaniu równań dynamiki układu objaśnimy na przykładzie przetwornika elektromechanicznego, przedstawionego schematycznie na rys. 1.12. Na rdzeń ruchomy o masie m i przekroju A , osadzony w rdzeniu nieruchomym, działa siła przyciągania elektromagnetycznego, zależna od natężenia prądu i , oraz siła sprężyny o współczynniku sprężystości k . Przyjmujemy następujące założenia upraszczające:

- pomijamy opór magnetyczny rdzeni jako wielokrotnie mniejszy niż opór szczeliny,
- pomijamy tarcie statyczne,
- zakładamy, że siła tarcia jest wprost proporcjonalna do prędkości.

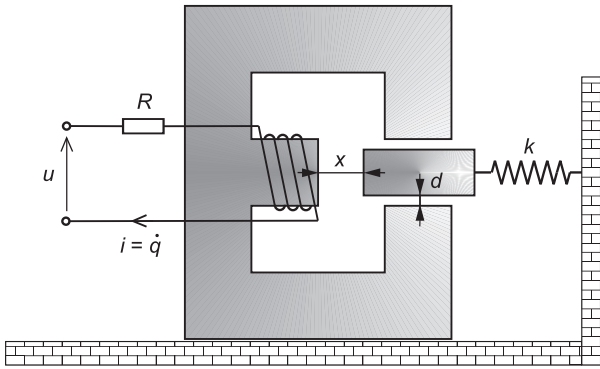
Obliczamy energię kinetyczną i potencjalną dla obwodu elektrycznego i mechanicznego. Energia kinetyczna obwodu elektrycznego

$$T_e = \frac{1}{2}L(t)i^2 = \frac{1}{2}L(t)\dot{q}^2$$

przy czym indukcyjność uzwojenia przetwornika jest określona zależnością

$$L(t) = \frac{D}{d+x}$$

gdzie: D – stała zależna od przekroju rdzenia, liczby zwojów oraz przenikalności magnetycznej powietrza; d – grubość przekładki antymagnetycznej, $x = x(t)$ – odległość rdzenia ruchomego od rdzenia nieruchomego; $i = \dot{q}$ – natężenie prądu w uzwojeniu przetwornika; q – ładunek elektryczny.



Rys. 1.12. Schemat przetwornika elektromechanicznego

Obwód elektryczny nie zawiera elementów pojemnościowych, wobec tego energia potencjalna równa się zero

$$U_e = 0$$

Energia kinetyczna obwodu mechanicznego

$$T_m = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

a energia potencjalna

$$U_m = \frac{1}{2}k(x - x_0)^2$$

przy czym x_0 jest odległością rdzenia ruchomego od nieruchomego w położeniu neutralnym sprężyny (siła sprężyny równa zero). Funkcja Lagrange'a w tym przypadku jest równa

$$L = \frac{1}{2} \frac{D}{d+x} \dot{q}^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} k (x - x_0)^2$$

Aby z kolei wyznaczyć funkcję Rayleigha, obliczamy różnicę energii rozproszonej i dostarczonej do układu dla obwodu elektrycznego i mechanicznego. Dla

obwodu elektrycznego

$$F_e = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 - u\dot{q}$$

przy czym R jest rezystancją uzwojenia, a $u = u(t)$ napięciem doprowadzonym do uzwojenia. Z kolei dla obwodu mechanicznego mamy

$$F_m = \frac{1}{2}R_m\dot{x}^2$$

przy czym R_m jest oporem mechanicznym. Funkcja Rayleigha w tym przypadku równa się więc

$$F = F_e + F_m = \frac{1}{2}R\dot{q}^2 - u\dot{q} + \frac{1}{2}R_m\dot{x}^2$$

Za składowe wektora $\mathbf{q}$ przyjmujemy ładunek elektryczny q oraz odległość rdzenia ruchomego od nieruchomego x

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q \\ x \end{bmatrix}$$

Na podstawie (1.96) dla $i = 1$ oraz $i = 2$ otrzymamy

$$\frac{D}{d+x}\ddot{q} + R\dot{q} - \frac{D}{d+x}\dot{q}\dot{x} = u \quad (1.97)$$

$$m\ddot{x} + R_m\dot{x} + k(x - x_0) + \frac{D}{2(d+x)^2}\dot{q}^2 = 0 \quad (1.98)$$

Przyjmując za zmienne stanu $x_1 = q$, $x_2 = \dot{q} = i$, $x_3 = x$, $x_4 = \dot{x}$, równania (1.97), (1.98) możemy napisać w postaci

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad (1.99)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{x_2x_4}{d+x_3} - \frac{R}{D}x_2(d+x_3) + \frac{d+x_3}{D}u \quad (1.100)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad (1.101)$$

$$\dot{x}_4 = -\frac{k}{m}(x_3 - x_0) - \frac{Dx_2^2}{2m(d+x_3)^2} - \frac{R_m}{m}x_4 \quad (1.102)$$

W tym przypadku równania stanu układu (1.99)÷(1.102) są równaniami nieliniowymi. Przyjmując za składowe wektora odpowiedzi $\mathbf{y}$ natężenie prądu w uzwojeniu przetwornika i oraz odległość x rdzenia ruchomego od nieruchomego, otrzymamy równanie wyjścia w postaci

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

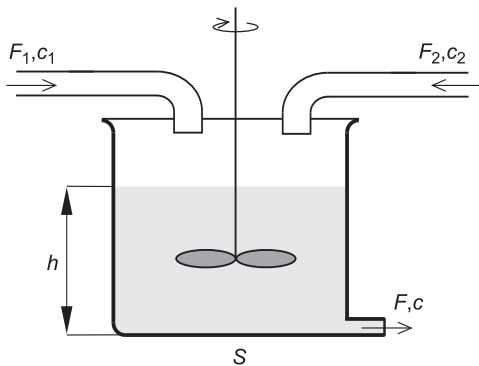
Powyższe rozważania podane dla układów elektromechanicznych można uogólnić również na układy elektropneumatyczne, elektrohydrauliczne, elektroakustyczne itp.

1.7.4. Procesy mieszania substancji

W opisie dynamiki procesów mieszania substancji za zmienne stanu można przyjmować różne wielkości. Często za zmienne stanu przyjmuje się:

- ilość danej substancji,
- temperaturę substancji,
- stężenie określonego składnika substancji itp.

Przy układaniu równań opisujących dynamikę procesów mieszania najczęściej korzysta się z równań bilansu masy i ciepła. Sposób układania równań opisujących w przestrzeni stanów dynamikę procesów mieszania objaśnimy na przykładzie idealnego mieszania dwóch cieczy w zbiorniku (rys. 1.13).



Rys. 1.13. Schemat procesu mieszania dwóch cieczy

Natężenia przepływu cieczy dopływających do zbiornika wynoszą $F_1 = F_1(t)$ i $F_2 = F_2(t)$, a ich stężenia odpowiednio $c_1 = c_1(t)$ i $c_2 = c_2(t)$. Natomiast natężenie przepływu cieczy wypływającej ze zbiornika wynosi $F = F(t)$, a jej stężenie $c = c(t)$. Za zmienne stanu przyjmujemy objętość cieczy w zbiorniku V oraz stężenie c cieczy wypływającej ze zbiornika. Wymuszeniami w tym przypadku są natężenia przepływu cieczy dopływających F_1 i F_2 . Z równań bilansu masy mamy

$$\dot{V} = F_1 + F_2 - F \quad (1.103)$$

$$\frac{d}{dt} [cV] = c_1 F_1 + c_2 F_2 - cF \quad (1.104)$$

Z prawa wypływu swobodnego cieczy wynika

$$F = k_1 \sqrt{h} \quad (1.105)$$

przy czym: k_1 – współczynnik zależny od przekroju otworu odpływowego i przyspieszenia ziemskiego, h – wysokość słupa cieczy w zbiorniku.

Po uwzględnieniu, że

$$h = \frac{V}{S}$$

otrzymamy

$$F = k\sqrt{V} \quad (1.106)$$

przy czym: $k = \frac{k_1}{\sqrt{S}}$, S – pole powierzchni przekroju zbiornika.

Podstawiając zależność (1.106) do równań (1.103), (1.104) i obliczając pochodną iloczynu, otrzymamy

$$\dot{V} = F_1 + F_2 - k\sqrt{V} \quad (1.107)$$

$$\dot{c}V + c\dot{V} = c_1F_1 + c_2F_2 - ck\sqrt{V} \quad (1.108)$$

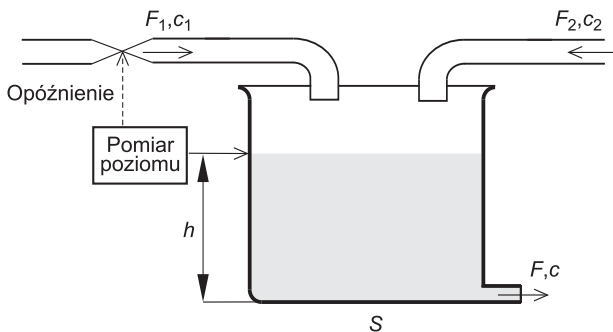
Podstawiając z kolei zależność (1.107) do równania (1.108) i rozwiązując to równanie względem $\dot{c}$, będziemy mieli

$$\dot{c} = \frac{1}{V} [(c_1 - c)F_1 + (c_2 - c)F_2] \quad (1.109)$$

Równania (1.107), (1.109) są poszukiwanymi nieliniowymi równaniami stanu procesu mieszania idealnego dwóch cieczy. Biorąc za odpowiedź wysokość h słupa cieczy w zbiorniku, otrzymamy równanie wyjścia w postaci

$$h = \left[\frac{1}{S}, \quad 0 \right] \begin{bmatrix} V \\ c \end{bmatrix} \quad (1.110)$$

Weźmy pod uwagę zbiornik, do którego dopływają dwie substancje ciekłe o natężeniach przepływu $F_1 = F_1(t)$ i $F_2 = F_2(t)$, a wypływa substancja ciekła o natężeniu przepływu $F = F(t)$ (rys. 1.14).



Rys. 1.14. Schemat układu regulacji poziomu cieczy w zbiorniku

Założmy, że natężenie przepływu F_1 jest zależne od wysokości poziomu cieczy $h(t)$ w zbiorniku i jest regulowane za pomocą zaworu w taki sposób, aby utrzymać stały poziom cieczy w zbiorniku. Mamy zatem

$$F_1(t) = kh(t - T_0) \quad (1.111)$$

przy czym: k – współczynnik proporcjonalności, T_0 – czas opóźnienia, tj. odstęp czasu między chwilą zmiany położenia zaworu a chwilą zmiany poziomu cieczy w zbiorniku. Natężenie przepływu substancji wypływającej F zależy od wysokości poziomu cieczy h w zbiorniku i jest określone zależnością (1.105). Za zmienną stanu przyjmujemy wysokość poziomu cieczy $h(t)$ w zbiorniku, a za wymuszenie natężenie przepływu F_2 . Równanie bilansu masy w zbiorniku ma postać

$$\rho S \dot{h}(t) = F_1(t) + F_2(t) - F(t) \quad (1.112)$$

przy czym: ρ – gęstość substancji, S – pole przekroju zbiornika.

Podstawiając zależności (1.111) i (1.105) do równania (1.112), otrzymamy poszukiwane równanie stanu

$$\dot{h}(t) = \frac{k}{\rho S} h(t - T_0) - \frac{k_1}{\rho S} \sqrt{h(t)} + \frac{1}{\rho S} F_2(t) \quad (1.113)$$

Równanie (1.113) jest nieliniowym równaniem różniczkowo-różnicowym. Modele matematyczne układów z opóźnieniami skupionymi mają postać równań różniczkowo-różnicowych, zwanych również równaniami z opóźnionym argumentem. W przypadku ogólnym układ nieliniowych równań różniczkowo-różnicowych ma postać

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{f}[\mathbf{x}(t), \mathbf{x}(t - T'_1), \dots, \mathbf{x}(t - T'_k); \\ &\quad \mathbf{u}(t), \mathbf{u}(t - T_1), \dots, \mathbf{u}(t - T_m), t] \end{aligned} \quad (1.114)$$

przy czym $T'_i > 0$ ($i = 1, 2, \dots, k$) i $T_j > 0$ ($j = 1, 2, \dots, m$) są opóźnieniami odpowiednio stanu i sterowania (wymuszenia). Aby wyznaczyć rozwiązanie $\mathbf{x}(t)$ dla $t > t_0$, nie wystarcza znajomość stanu $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ i sterowania $\mathbf{u}(t)$ w przedziale $[t_0, t]$; niezbędna jest jeszcze znajomość $\mathbf{x}(t)$ w przedziale $[t_0 - \max_i T'_i, t_0]$ oraz $\mathbf{u}(t)$ w przedziale $[t_0 - \max_j T_j, t_0]$, które łącznie z $\mathbf{x}_0$ stanowią stan uogólniony procesu.

1.7.5. Układy o parametrach rozłożonych

Sygnały (zmiennie) określające układy o parametrach rozłożonych zależą nie tylko od czasu, ale również od współrzędnych przestrzennych. Układy o parametrach rozłożonych, będące układami o opóźnieniach rozłożonych, są opisane równaniami różniczkowymi cząstkowymi. Przykładami układów o parametrach rozłożonych są linie długie, wymienniki ciepła, reaktory rurowe itd. Sposób