

Paweł
Strzelecki

Krótkie wprowadzenie do równań różniczkowych częstkowych



Krótkie
wprowadzenie
do równań
różniczkowych
częstkowych

Paweł
Strzelecki

Krótkie
wprowadzenie
do równań
różniczkowych
cząstkowych



Projekt okładki
Edwin Radzikowski

Redakcja
Elżbieta Sejferówna

Projekt graficzny książki
Zofia Kosińska

Skład i łamanie
Raven

© Copyright by Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego 2006

ISBN 978-83-235-2686-5 (PDF)

Wydawnictwa Uniwersytetu Warszawskiego
00-497 Warszawa, ul. Nowy Świat 4
<http://www.wuw.pl>; e-mail: wuw@uw.edu.pl
Dział Handlowy: tel (0 48 22) 55 31 333
e-mail: dz.handlowy@uw.edu.pl
Księgarnia internetowa: <http://www.wuw.pl>

Wydanie 1

Spis treści

Wstęp	7
1. Wprowadzenie	9
1.1. Garść przykładów	10
2. Równanie falowe	15
2.1. Równanie struny i wzór d'Alemberta	15
2.2. Wzór Kirchhoffa. Zasada Huygensa	17
2.2.1. Struna półnieskończona	18
2.2.2. Średnie sferyczne i wyprowadzenie wzoru Kirchhoffa	19
2.3. Wzór Poissona. Czego nie mogą płaszczaki?	24
2.4. Niejednorodne równanie falowe: całki Duhamela	25
3. Równanie przewodnictwa cieplnego	28
3.1. Istnienie rozwiązań	28
3.2. Zasada maksimum	32
3.3. Niejednorodne równanie przewodnictwa cieplnego	35
3.4. Dygresja probabilistyczna	36
4. Funkcje harmoniczne i równanie Laplace'a	38
4.1. Własność wartości średniej i zasada maksimum	39
4.2. Nierówność Harnacka	42
4.3. Formuła reprezentacyjna Greena	43
4.4. Zagadnienie Dirichleta w kuli: całka Poissona	47
4.4.1. Oszacowania pochodnych i ciągi funkcji harmonicznych	51
4.5. Metoda Perrona	52
4.6. Bariery	56
5. Klasyfikacja równań rzędu drugiego	61

6. Przestrzenie Sobolewa	64
6.1. Motywacje	65
6.2. Definicje, niektóre własności	68
6.2.1. Zupełność	72
6.2.2. Gęstość funkcji gładkich	73
6.3. Nierówność Poincarégo i twierdzenie Sobolewa	77
6.4. Twierdzenie Rellicha–Kondraszowa	80
7. Słabe rozwiązania	84
7.1. Metoda wariacyjna Ritza	84
7.2. Zastosowania metody Ritza	90
7.3. Inne metody konstrukcji słabych rozwiązań	94
7.3.1. Lemat Laxa i Milgrama	94
7.3.2. Przykład zastosowania lematu Laxa i Milgrama	95
7.3.3. Wzmianka o metodzie Galerkina	98
7.4. Z powrotem do zwyczajności: lemat Weyla	99
8. Wartości własne laplasjanu	103
8.1. Dygresja: operatory zwarte	104
8.2. Wartości własne laplasjanu	107
8.3. Wzmianka o twierdzeniu Weyla. Czy można usłyszeć kształt bębna?	109
9. Informacja o twierdzeniu Kowalewskiej	111
9.1. Przykład Mizohaty	111
9.2. Twierdzenie Kowalewskiej	113
Dodatki	116
A. Oznaczenia i uzupełnienia	116
A.1. Przestrzenie Banacha	117
A.2. Przestrzenie funkcji całkowalnych	118
B. Szeregi Fouriera dla leniwych	120
B.1. Model przepływu ciepła w jednorodnym pręcie	121
B.2. Model drgającej struny	122
B.2.1. Wzory na współczynniki	124
B.3. Szeregi Fouriera funkcji całkowalnych	124
B.4. Szeregi Fouriera funkcji całkowalnych z kwadratem	127
B.5. Kryteria zbieżności	130
C. Zadania	132
C.1. Rozwiązania klasyczne równań liniowych	132
C.2. Przestrzenie Sobolewa i słabe rozwiązania	143
Bibliografia	150
Skorowidz	151

Wstęp

Tekst tej książeczki odpowiada dość wiernie semestralnemu wykładowi z równań różniczkowych cząstkowych, który prowadziłem w latach akademickich 1998/99, 2001/02 oraz 2004/05 na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki Uniwersytetu Warszawskiego.

Czytelnik znajdzie w niej dość klasyczne omówienie trzech najważniejszych równań liniowych drugiego rzędu: równania falowego, równania przewodnictwa cieplnego i równania Laplace'a, a następnie pobieżny i szybki przegląd teorii przestrzeni Sobolewa, krótkie omówienie pojęcia słabego rozwiązania (równania eliptycznego w postaci dywergencyjnej), lemat Weyla, garść informacji o wartościach własnych operatora Laplace'a i, na zakończenie, informację o twierdzeniu Kowalewskiej. Mam nadzieję, że dzięki takiemu eklektycznemu doborowi materiału Czytelnicy będą mogli z jednej strony otrzeć się o bardzo klasyczne partie teorii, a z drugiej strony – zapoznać się z odrobiną pojęć i metod dwudziestowiecznych, przydatnych także w badaniach równań nieliniowych. Zasadniczym celem było przedstawienie wykładu **różnorodnego**, w jakimś sensie zamkniętego, prowokującego przynajmniej niektórych do samodzielnych poszukiwań – a jednocześnie w miarę zrozumiałego, nawet dla słabszych studentów.

Nie wszystko zostało wyjaśnione do ostatniego szczegółu; tekst zawiera liczne drobne luki. Ich samodzielne uzupełnienie i wyjaśnienie powinno być dla Czytelnika okazją do lepszego zrozumienia omawianych pojęć. Szerokie marginesy są m.in. po to, by można było robić na nich własne rysunki, dopisywać uwagi, obliczenia itp. Liczne dodatkowe informacje (czasem dość poważne twierdzenia) są zawarte w zadaniach, które zaczerpnąłem z bardzo różnych źródeł.

Wykład semestralny z konieczności musi być szczupły, a żaden tekst takiego wykładu nie jest ani monografią, ani solidnym, wszechstronnym podręcznikiem. Między innymi dlatego pominięte zostały:

- spojrzenie na równania ewolucyjne z punktu widzenia teorii pólgrup;
- omówienie równania przewodnictwa cieplnego w obszarach ograniczonych;
- szczegółowa klasyfikacja równań rzędu drugiego na płaszczyźnie;
- równania rzędu pierwszego (pominąwszy wyprowadzenie wzoru d'Alemberta i niektóre proste zadania);
- klasyczna teoria dystrybucji i transformata Fouriera;
- teoria potencjału i równania całkowe.

Wiedzy o powyższych zagadnieniach trzeba niestety szukać gdzie indziej. Osoby, które chcą się poważniej zainteresować równaniami różniczkowymi cząstkowymi (i wykorzystywanymi w nich działami analizy matematycznej), powinny sięgnąć np. do wymienionych w spisie literatury książek L.C. Evansa, H. Marcinkowskiej, M.E. Taylora, W. Michajłowa i innych.

Za uwagi, które przyczyniły się do ulepszenia tekstu, jestem wdzięczny recenzentom: prof. dr hab. Piotrowi Bilerowi, dr Michałowi Krychowi, prof. dr hab. Tadeuszowi Nadziei, a także wielu studentom, którzy wcześniejszymi wersjami tekstu tej książki posługiwali się, słuchając moich wykładów i ucząc się do egzaminów.

Wszelkie niedociągnięcia i błędy obciążają wyłącznie moje konto.

Paweł Strzelecki

1. Wprowadzenie

Równania różniczkowe cząstkowe – równania, w których występuje niewiadoma funkcja wielu zmiennych i jej pochodne względem **różnych** zmiennych – stanowią dziedzinę, która (szczególnie w oczach studenta, wyposażonego w bagaż dwóch pierwszych lat studiów matematycznych i przyzwyczajonego do eleganckich teorii, budowanych w trybie: **abstrakcyjna i ogólna definicja, przykład, lemat, twierdzenie, dowód, wniosek**) dość poważnie różni się od innych gałęzi matematyki. Składa się na to kilka przyczyn.

Po pierwsze, jest to dziedzina niezwykle obszerna, łącząca się z wieloma partiami analizy matematycznej, a także z geometrią różniczkową oraz (w mniejszym zakresie) rachunkiem prawdopodobieństwa. Osoba, która na Wydziale Matematyki, Informatyki i Mechaniki UW prowadzi wykład *Równania różniczkowe cząstkowe I*, powinna przedstawić studentom dość obszerny materiał, którego początki sięgają lat 1740–1750 i prac Daniela Bernoulliego oraz Jeana d’Alemberta poświęconych równaniu struny, a którego najbardziej zaawansowana partia pochodzi z okolic połowy dwudziestego wieku – i praktycznie nie sposób jej omówić, nie sięgając po twierdzenie Stokesa oraz okruchy analizy funkcjonalnej. Przykłady ilustrujące sposoby rozwiązywania pojedynczych równań lub własności rozwiązań są często niełatwe – nie ze względu na jakąś szczególną komplikację pojęć, lecz dlatego, że aby ocenić i docenić końcowy wynik, trzeba się najpierw przebić przez warstwę rachunków, na ogół dłuższą niż, powiedzmy, w algebrze liniowej. Mało kto lubi rachunki – szczególnie przed ich wykonaniem. Dodajmy, że niektóre z przykładów podawanych zwyczajowo na ćwiczeniach z tego przedmiotu miały w swoim czasie przełomowe znaczenie. Na przykład teoria szeregów Fouriera wyrosła z prób rozwiązywania równania falowego i równania przewodnictwa cieplnego w **jednym** wymiarze przestrzennym, a korzenie teorii przestrzeni Hilberta (oraz operatorów zwartych) wiążą się z badaniem równań Laplace’a i Poissona (i wartości własnych laplasjanu).

Po drugie, nie istnieje coś takiego, jak **ogólna teoria równań różniczkowych cząstkowych**. Nie ma właściwie żadnych twierdzeń, które dotyczyłyby **wszystkich** równań różniczkowych cząstkowych (za wyjątek, wymagający i tak przyjęcia bardzo ostrych założeń i poważnego ograniczenia klasy rozpatrywanych równań, można uznać twierdzenie Cauchy’ego i Kowalewskiej, które omawiamy krótko w ostatnim rozdziale). Owszem, są przykłady – często bardzo rozbudowane, są twierdzenia, dotyczące zwykle jednego równania lub układu równań, a w wersji optymistycznej – tej czy innej klasy równań, na ogół dość wąskiej, biorąc pod uwagę, jak szeroka jest klasa wszystkich napisów, które bylibyśmy skłonni nazwać **równaniami różniczkowymi cząstkowymi**. Ale na tym, w jakimś sensie, koniec.

Po trzecie wreszcie, w równaniach różniczkowych cząstkowych często warto odwołać się do motywacji fizycznej (oraz do fizycznej interpretacji niektórych twierdzeń, wzorów itp.). To właśnie fizyk mówi niekiedy matematykowi, które równania z nieskończonej listy są **ważne** i warto je rozważyć najpierw – bowiem ich rozwiązania opisują jakiś proces fizyczny. (Niemal wszystkie osoby, które na dalszych stronach zostaną wymienione z nazwiska, zajmowały się i matematyką, i fizyką) Nie oznacza to oczywiście, że nie sposób uczyć się teorii równań cząstkowych, o ile się nie zna fizyki. Z drugiej strony, elementarna znajomość fizyki pozwala wyrobić sobie pełniejszy obraz niektórych partii teorii.

W świetle tych uwag nie ma sensu rozpoczynać wykładu od ogólnej definicji **równania różniczkowego cząstkowego** (z której i tak nie będziemy później korzystać). Zamiast tego podamy kilka przykładów. Bliższe omówienie trzech z nich zajmie nam mniej więcej pół semestru.

1.1. Garść przykładów

A Układ równań Cauchy’ego–Riemanna

Wiadomo (patrz dowolny podręcznik do teorii funkcji analitycznych), że funkcja $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ma w każdym punkcie pochodną zespoloną **wtedy i tylko wtedy, gdy** jej część rzeczywista u i zespolona v spełniają układ równań

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \quad (1.1)$$

Zatem, w pewnym sensie, cała teoria funkcji analitycznych zajmuje się badaniem własności rozwiązań **jednego** układu dwóch linio-

wych równań różniczkowych cząstkowych (pierwszego rzędu, o stałych współczynnikach).

[B] Równanie powierzchni minimalnych

Niech $D = D(0, 1) \subseteq \mathbb{R}^2$ będzie dyskiem jednostkowym; rozpatrujemy wszystkie funkcje $u : \overline{D} \rightarrow \mathbb{R}$ klasy C^2 , których wartości brzegowe $u|_{\partial D}$ są równe ustalonej funkcji ciągłej $\varphi : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$. Dla takich u położmy

$$P[u] = \int_D \sqrt{1 + |\nabla u|^2} \, dx \, dy,$$

gdzie

$$|\nabla u|^2 = (u_x)^2 + (u_y)^2$$

jest kwadratem długości gradientu funkcji u . Wartością funkcjonału P jest pole powierzchni stanowiącej wykres funkcji u ; brzegiem tej powierzchni jest ustalona krzywa Jordana w $\mathbb{R}^3$, składająca się z punktów $(\cos t, \sin t, \varphi(\cos t, \sin t))$. Można zadać naturalne pytanie: czy P osiąga swą wartość najmniejszą, a jeśli tak, to dla jakiej funkcji? Nietrudno podać warunek konieczny na to, by $P[u] = \min$; jeśli tak jest, to z pewnością dla każdej liczby $\varepsilon \in \mathbb{R}$ i każdej funkcji $\psi \in C_0^\infty(D)$ mamy

$$F(\varepsilon) := P[u + \varepsilon\psi] \geq P[u] = F(0).$$

F jest funkcją jednej zmiennej ε i w zerze ma minimum lokalne, więc (proszę sprawdzić, że F jest funkcją różniczkowalną!) $F'(0) = 0$. Różniczkując pod znakiem całki, otrzymujemy zatem warunek

$$\int_D \frac{u_x \psi_x + u_y \psi_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \, dx \, dy = 0 \quad \forall \psi \in C_0^\infty(D),$$

lub równoważnie, na mocy twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego,

$$\int_D \psi \left[\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_x + \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_y \right] \, dx \, dy = 0$$

$$\forall \psi \in C_0^\infty(D).$$

Z dowolności ψ wynika, że wyrażenie w nawiasie kwadratowym jest równe zeru, tzn.

$$\left(\frac{u_x}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_x + \left(\frac{u_y}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \right)_y = 0 \quad \text{w dysku } D. \quad (1.2)$$

Listę oznaczeń
można znaleźć
w dodatku A

Twierdzenie
Gaussa–Ostrogradskiego
formułujemy na
początku rozdziału 4
(patrz tw. 4.3)

Jest to wspomniany warunek konieczny. Jego geometryczna interpretacja jest następująca: wykres funkcji u ma w każdym punkcie średnią krzywiznę równą 0.

C Równanie przewodnictwa cieplnego

Niech Ω będzie obszarem w $\mathbb{R}^n$; dodatkową zmienną $t \geq 0$ będziemy interpretować jako czas. Równanie

$$u_t - \Delta_x u = 0, \quad (1.3)$$

gdzie

$$\Delta_x = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (1.4)$$

jest tzw. **operatorem Laplace’a** (krótko: laplasjanem), nazywa się równaniem przewodnictwa cieplnego. Niewiadoma funkcja $u : \Omega \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ jest, z fizycznego punktu widzenia, temperaturą substancji (jednorodnej i izotropowej) wypełniającej obszar Ω ; ściślej, $u(x, t)$ jest temperaturą w punkcie $x \in \Omega$ w chwili czasu t .

Aby zagwarantować istnienie i jednoznaczność rozwiązań, równanie (1.3) uzupełnia się warunkami początkowymi i brzegowymi. Na przykład zakłada się np., że dany jest początkowy rozkład temperatury $u(x, 0) = f(x)$ i wiadomo ponadto, w jaki sposób dokonuje się wymiana ciepła między Ω i otoczeniem, np.

- $u|_{\partial\Omega} = 0$ (warunek brzegowy Dirichleta: stała temperatura zewnątrz obszaru Ω);
- pochodna normalna $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}|_{\partial\Omega} = 0$ (warunek brzegowy Neumanna: brak przepływu ciepła przez brzeg obszaru Ω).

Podamy, dla $n = 3$, szkieletowe wyprowadzenie równania (1.3). Potrzebne w nim będą dwa założenia o charakterze fizycznym. Po pierwsze, przyjmiemy, że tzw. **strumień ciepła** $\mathbf{J}(x, t)$, tzn. wektor wskazujący kierunek i tempo przepływu ciepła, jest proporcjonalny do gradientu temperatury,

$$\mathbf{J}(x, t) = -k \nabla_x u = -k(u_{x_1}, u_{x_2}, u_{x_3}).$$

(Stała k jest dodatnia, minus ma sens fizyczny.) Zatem, ilość ciepła przepływającego przez powierzchnię Σ w jednostce czasu jest równa

$$\int_{\Sigma} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle d\sigma;$$

$\mathbf{n}$ oznacza jednostkowy wektor normalny do powierzchni Σ . Ilość ciepła, wypływającego w jednostce czasu z obszaru $V \subseteq \Omega$, to

$$\int_{\partial V} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dx.$$

(Równość całek wynika z twierdzenia Gaussa–Ostrogradskiego; zakładamy milcząco, że temperatura u jest funkcją klasy C^2). Drugie założenie o charakterze fizycznym orzeka, że każdy obszar $V \subseteq \Omega$ ogrzewa się proporcjonalnie do ilości ciepła, która doń wpływa. Przeto, z uwagi na ostatnie równanie,

$$-\int_V c \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_{\partial V} \langle \mathbf{J}, \mathbf{n} \rangle d\sigma = \int_V \operatorname{div} \mathbf{J} dx,$$

to znaczy

$$\int_V \left(\operatorname{div} \mathbf{J} + c \frac{\partial u}{\partial t} \right) dx = 0.$$

Ponieważ V jest dowolny, więc wynika stąd, że

$$c \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div}(k \nabla u) = k \Delta_x u,$$

to znaczy przy odpowiednim doborze jednostek¹ istotnie jest $u_t = \Delta_x u$.

[D] Równanie Laplace’a

Jest to równanie $\Delta u = 0$. Jego rozwiązania nazywa się funkcjami harmonicznymi (patrz rozdz. 4).

Jak poprzednio, Δ jest operatorem Laplace’a, funkcja u zaś jest określona na pewnym obszarze $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Równanie Laplace’a opisuje stany stacjonarne rozmaitych procesów fizycznych: w zależności od interpretacji, funkcja u może być np. stacjonarnym (granicznym) rozkładem temperatury w obszarze Ω , potencjałem pola grawitacyjnego bądź pola elektromagnetycznego (w obszarze pozbawionym źródeł pola). Dla $n = 2$, część urojona i rzeczywista funkcji analitycznej (patrz przykład **[A]**) są funkcjami harmonicznymi.

¹Widać, że gdy pomijamy współczynniki c i k , to lewa strona u_t ma jednostkę *stopień na sekundę*, natomiast prawa strona, $\Delta_x u$, ma jednostkę *stopień przez metr do kwadratu*. Fizyk likwiduje tę niezgodność, nadając odpowiednie jednostki współczynnikom. My nie będziemy się tą sprawą więcej przejmować.

E Równanie falowe

Jest to równanie

$$u_{tt} - c^2 \Delta_x u = 0, \quad x \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n, t > 0. \quad (1.5)$$

Dla $n = 1$ równanie (1.5) opisuje (niewielkie) drgania **struny**, dla $n = 2$ – drgania **membrany** (błony bębena), w najciekawszym zaś z fizycznego punktu widzenia przypadku $n = 3$ – **fale elektromagnetyczne** (a także akustyczne). Wartości $u(x, t)$ niewiadomej funkcji u są wychyleniami z położenia równowagi.

Od badania własności rozwiązań równania falowego w najprostszym przypadku, dla $n = 1$, zaczniemy prawdziwą pracę.

2. Równanie falowe

2.1. Równanie struny i wzór d'Alemberta

Niech L oznacza operator różniczkowy dany wzorem

$$L = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

Zauważmy, że $L = L_2 \circ L_1$, gdzie

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - c \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c \frac{\partial}{\partial x}.$$

Rozważymy zagadnienie początkowe Cauchy'ego dla równania struny swobodnej:

$$\begin{cases} Lu \equiv u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0 & \text{dla } x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}, \\ u_t(x, 0) = g(x) & \text{dla } x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.1)$$

Funkcje $f \in C^2(\mathbb{R})$ i $g \in C^1(\mathbb{R})$ są z góry dane (opisują, odpowiednio, początkowe wychylenie struny z położenia równowagi oraz jej początkową prędkość). Niewiadomą jest funkcja u , klasy C^2 .

Etap 1. Wyznamy postać wszystkich rozwiązań równania $Lu = 0$. Rozbijemy to zadanie na dwa kroki: rozwiążemy równania $L_1 u = v$ i $L_2 v = 0$

(A) Załóżmy, że $L_2 v = 0$ w pewnym zbiorze wypukłym $E \subseteq \mathbb{R}^2$. Niech ℓ_γ oznacza prostą $x - ct = \gamma = \text{const}$ ($\gamma \in \mathbb{R}$). Połóżmy $h = v|_{\ell_\gamma}$, to znaczy, ściśle mówiąc,

$$h(t) := v(\gamma + ct, t).$$

Uwaga. Ściślej mówiąc, będziemy poszukiwać rozwiązania klasy C^1 w półpłaszczyźnie domkniętej $\mathbb{R} \times [0, \infty)$, które jest klasy C^2 na półpłaszczyźnie otwartej $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.