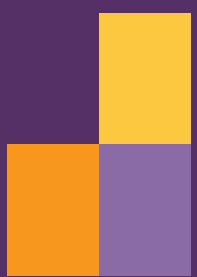
Witold Kołodziej

ANALIZA MATEMATYCZNA



WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN

Witold Kołodziej

ANALIZA MATEMATYCZNA

Wydanie piąte

WYDAWNICTWO NAUKOWE PWN
WARSZAWA 2009

Książka ukazała się w latach 1978–1986
nakładem Państwowego Wydawnictwa Naukowego
w serii MATEMATYKA DLA POLITECHNIK

Projekt okładki i stron tytułowych **Małgorzata Podziomek**

Redaktor inicjujący **Izabela Ewa Mika**

Copyright © by Państwowe Wydawnictwo Naukowe
Warszawa 1978

Copyright © by Wydawnictwo Naukowe PWN SA
Warszawa 2009

ISBN 978-83-01-15970-2

Wydawnictwo Naukowe PWN SA
02-676 Warszawa, ul. Postępu 18
tel. 022 69 54 321
faks 022 69 54 031
e-mail: pwn@pwn.com.pl
www.pwn.pl

Przedmowa

Książka niniejsza powstała z wykładów prowadzonych przeze mnie na Wydziale Fizyki Technicznej i Matematyki Stosowanej Politechniki Warszawskiej i zawiera materiał objęty programem pierwszego roku studiów.

Współczesna analiza matematyczna to przedmiot trudny i zbyt obszerny, by można go było wyłożyć studentom bez odwoływania się do podręcznika. Wykładowca ma do dyspozycji za mało czasu, aby szczegółowo przeprowadzać dowody, a niedomówienia znacznie obniżają wartość wykładu. W polskiej literaturze matematycznej brak jest podręcznika analizy dostosowanego do programu studiów matematyczno-fizycznych wyższych uczelni technicznych. Niniejsza książka stanowi próbę wypełnienia tej luki.

Wykaz podręczników, które okazały się pomocne przy opracowaniu moich wykładów do druku, podany jest na końcu książki.

Poczuwam się do miłego obowiązku złożenia podziękowania prof. W. Żakowskiemu, z którego inicjatywy książka ta powstała. Pragnę również wyrazić serdeczne podziękowanie prof. E. Otto, prof. T. Traczykowi i prof. T. Trajdosowi za życzliwe zainteresowanie książką okazywane w ciągu dwóch długich lat pracy nad nią i cenne rady, jakich mi udzielili. Prof. J. Muszyński był uprzejmy przeczytać maszynopis przed oddaniem go do druku; dzięki jego wnikliwym uwagom zostały usunięte z tekstu liczne usterki, za co jestem mu winien szczególną wdzięczność.

Witold Kołodziej

Warszawa, w listopadzie 1976 r.

Spis rzeczy

Wstęp

§ 1. Podstawowe pojęcia mnogościowe 13
1. Zbiory 13
2. Działania na zbiorach 14
3. Produkty kartezjańskie 15
4. Relacje równoważności. Podział na klasy 15
5. Funkcje 16
6. Zbiory przeliczalne 20
§ 2. Liczby rzeczywiste 22
1. Zbiór R liczb rzeczywistych jako ciało 22
2. Relacja mniejszości. Zasada ciągłości 23
3. Przedziały. Wartość bezwzględna 25
4. Przykłady zastosowania zasady ciągłości 25
5. Funkcje o wartościach rzeczywistych 27
§ 3. Liczby zespolone 28
1. Ciało C liczb zespolonych 28
2. Geometryczna interpretacja liczb zespolonych. Moduł i argument liczby 29
3. Funkcje o wartościach zespolonych 30

Rozdział I. Elementy topologii

§ 4. Przestrzenie metryczne 31
1. Definicja 31
2. Średnica zbioru. Zbiory ograniczone 31
3. Granica ciągu punktów 32
§ 5. Granica ciągu liczbowego 34
1. Własności granicy ciągu liczbowego 34
2. Granica ciągu liczb rzeczywistych 36
3. Przykłady 39
4. Liczba e 41
§ 6. Rozszerzony zbiór liczb rzeczywistych $\tilde{R}$ 43
1. Definicje 43
2. Granice ekstremalne ciągu 44
3. Granica ciągu 46
4. Funkcje o wartościach w $\tilde{R}$ 48

§ 7. Przestrzenie metryczne zupełne 49
1. Definicja. Zupełność przestrzeni R 49
2. Twierdzenie o punkcie stałym 50
§ 8. Produkt kartezjański przestrzeni metrycznych 52
1. Metryka i zbieżność w produkcie 52
2. Produkt przestrzeni zupełnych 54
§ 9. Granica funkcji 55
1. Granica funkcji w punkcie 55
2. Granica funkcji o wartościach liczbowych 56
3. Granica funkcji o wartościach rzeczywistych 57
4. Granica funkcji zmiennej rzeczywistej 58
5. Granica funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych 59
6. Przykłady 60
§ 10. Funkcje ciągłe 63
1. Definicja i podstawowe twierdzenia 63
2. Przykłady 65
§ 11. Ciągi funkcyjne 68
1. Zbieżność punktowa i zbieżność jednostajna 68
2. Własności granicy ciągu zbieżnego jednostajnie 69
§ 12. Przestrzenie topologiczne 71
1. Topologia. Zbiory otwarte. Wnętrze zbioru 71
2. Zbiory domknięte. Domknięcie zbioru 73
3. Topologia w przestrzeni metrycznej 74
§ 13. Topologia w podzbiorze przestrzeni topologicznej 77
1. Topologia indukowana 77
2. Przypadek przestrzeni metrycznej 78
§ 14. Produkt kartezjański przestrzeni topologicznych 79
1. Topologia w produkcie 79
2. Przypadek produktu przestrzeni metrycznych 79
§ 15. Funkcje ciągłe w przestrzeniach topologicznych 80
1. Definicja 80
2. Homeomorfizmy 81
§ 16. Przestrzenie ośrodkowe 82
1. Definicja 82
2. Przypadek przestrzeni metrycznej 83
3. Produkt kartezjański przestrzeni ośrodkowych 84
§ 17. Przestrzenie zwarte 85
1. Definicja. Przypadek przestrzeni metrycznej 85
2. Produkt kartezjański przestrzeni zwartych 87
3. Funkcje ciągłe na przestrzeniach metrycznych zwartych 88
4. Przestrzeń $C(X; Y)$ 90
§ 18. Przestrzenie spójne 91
1. Definicja. Zbiory spójne w przestrzeni R 91
2. Kryteria spójności 92
3. Zastosowanie: funkcje cyklometryczne i funkcja logarytmiczna 93

Rozdział II. Elementy analizy funkcjonalnej

§ 19. Przestrzenie unormowane 96
1. Przestrzenie liniowe 96
2. Przykłady 98
3. Podstawowe pojęcia geometryczne 98

4. Przestrzenie unormowane i przestrzenie Banacha 99
5. Produkt kartezjański przestrzeni unormowanych 101
6. Wektory styczne do zbioru. Hiperpłaszczyzna styczna 102
7. Funkcje o wartościach w przestrzeni unormowanej 103
8. Przestrzeń unormowana $C(X; Y)$ 104
§ 20. Przestrzenie unitarne 105
1. Iloczyn skalarny. Przestrzenie unitarne i przestrzenie Hilberta 105
2. Ortogonalność. Rzut ortogonalny 107
3. Przestrzenie unitarne skończenie wymiarowe 108
§ 21. Funkcje liniowe 110
1. Definicja. Funkcje liniowe ciągłe 110
2. Zbiór funkcji liniowych ciągłych $L(X; Y)$ jako przestrzeń unormowana 111
3. Przykłady 113
§ 22. Funkcje wieloliniowe 115
1. Definicja. Funkcje wieloliniowe ciągłe 115
2. Przestrzeń $L(X_1, \ldots, X_k; Y)$ 116
3. Przykłady 116
§ 23. Szeregi 119
1. Szeregi elementów przestrzeni unormowanych. Ogólne kryteria zbieżności 119
2. Przykłady 121
3. Szeregi zbieżne bezwzględnie 123
4. Szeregi liczb nieujemnych 125
5. Szeregi podwójne elementów przestrzeni unormowanej 127
6. Twierdzenie Cauchy'ego o mnożeniu szeregów 130
7. Szeregi podwójne liczb nieujemnych 131
8. Szeregi funkcyjne 133
§ 24. Izomorfizmy i izometrie 136
1. Przestrzenie izomorficzne 136
2. Przestrzenie izometryczne 138
3. Przykłady 139

Rozdział III. Wstępne wiadomości z rachunku różniczkowego i całkowego

§ 25. Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej 142
1. Definicje 142
2. Interpretacja geometryczna pochodnej 143
3. Podstawowe reguły różniczkowania 146
§ 26. Pochodna funkcji zmiennej rzeczywistej o wartościach rzeczywistych 149
1. Przykłady 149
2. Pochodna nieskończona 152
3. Twierdzenia Rolle'a, Lagrange'a i Cauchy'ego 152
4. Reguły de L'Hospitala 154
§ 27. Ogólne twierdzenia o przyrostach dla funkcji zmiennej rzeczywistej 157
1. Problem uogólnienia twierdzeń Lagrange'a i Cauchy'ego na przypadek funkcji o wartościach w przestrzeniach unormowanych 157
2. Zastosowanie: pochodna granicy 158
§ 28. Pochodne wyższych rzędów funkcji zmiennej rzeczywistej 160
1. Definicje 160
2. Zastosowanie pochodnej rzędu drugiego do badania wypukłości funkcji 162
3. Wzór Taylora 164
4. Szereg Taylora 168
5. Funkcja wykładnicza i funkcje trygonometryczne zmiennej zespolonej 169

§ 29. Pochodne cząstkowe funkcji wielu zmiennych rzeczywistych 171
1. Pochodne cząstkowe rzędu pierwszego 171
2. Twierdzenie o przyrostach. Warunek Lipschitza 172
3. Pochodne cząstkowe wyższych rzędów 173
§ 30. Pochodne kierunkowe 175
1. Definicje 175
2. Związek z pochodnymi cząstkowymi 175
§ 31. Funkcja pierwotna i całka nieoznaczona 177
1. Funkcja pierwotna 177
2. Całka nieoznaczona 179
3. Reguły całkowania 179
4. Całkowanie funkcji elementarnych 180
§ 32. Całka oznaczona funkcji ciągłej 186
1. Definicja 186
2. Wzory rachunkowe 187
3. Nierówności. Twierdzenie o wartości średniej 188

Rozdział IV. Równania różniczkowe zwyczajne

§ 33. Ogólna teoria równań różniczkowych 191
1. Równanie różniczkowe rzędu pierwszego. Zagadnienie początkowe 191
2. Twierdzenia o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania zagadnienia początkowego 192
3. Układy równań różniczkowych rzędu pierwszego 199
4. Równania różniczkowe wyższych rzędów 200
§ 34. Równania różniczkowe liniowe 203
1. Układy równań liniowych rzędu pierwszego 203
2. Układy równań liniowych o stałych współczynnikach 206
3. Równanie liniowe rzędu n 209
4. Równanie liniowe rzędu n o stałych współczynnikach 212

Rozdział V. Ogólna teoria różniczkowania

§ 35. Pochodna funkcji określonej na podzbiorze przestrzeni unormowanej 215
1. Definicja. Związek z pochodną kierunkową 215
2. Przypadek funkcji zmiennej rzeczywistej. Równoważność obu definicji pochodnej 216
3. Interpretacja geometryczna pochodnej 217
4. Przykłady 219
5. Liniowość operacji różniczkowania 220
6. Twierdzenie o przyrostach 222
§ 36. Pochodna funkcji wielu zmiennych. Związek z pochodnymi cząstkowymi 224
1. Pochodna funkcji określonej na podzbiorze przestrzeni R^m 224
2. Uogólnienie: pochodna funkcji określonej na podzbiorze produktu przestrzeni unormowanych 224
3. Pochodna funkcji o wartościach w produkcie przestrzeni unormowanych 228
4. Synteza obu przypadków 229
§ 37. Różniczkowanie złożenia 231
1. Ogólne twierdzenie o pochodnej złożenia 231
2. Różniczkowanie złożenia w przestrzeniach arytmetycznych 233
3. Uogólnione twierdzenie o pochodnej iloczynu 234
§ 38. Dyfeomorfizmy 235
1. Różniczkowanie funkcji odwrotnej 235
2. Odwzorowania regularne i dyfeomorfizmy 238

§ 39. Funkcje uwikłane 240
1. Ogólne twierdzenie o funkcjach uwikłanych 240
2. Funkcje uwikłane określone układem równań w przestrzeniach arytmetycznych 243
§ 40. Pochodne wyższych rzędów 245
1. Wstęp 245
2. Pochodna rzędu drugiego 246
3. Pochodna rzędu n 248
4. Przypadek funkcji zmiennej rzeczywistej. Równoważność obu definicji pochodnej rzędu n . 250
5. Funkcje klasy C_n 251
6. Pochodna rzędu n funkcji wielu zmiennych rzeczywistych. Związek z pochodnymi cząstkowymi 253
7. Wzór Taylora 256
§ 41. Ekstrema funkcji 260
1. Definicja 260
2. Kryteria 260

Rozdział VI. Teoria miary i całki

§ 42. Ogólna teoria miary 266
1. Wstęp 266
2. σ-ciała 266
3. Miara 267
4. Miara zewnętrzna 271
§ 43. Miara Lebesgue'a w R^m 276
1. Przedziały. Objętość przedziału 276
2. Miara Lebesgue'a 279
3. Charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a 281
§ 44. Funkcje mierzalne 289
1. Definicja 289
2. Działania na funkcjach mierzalnych 291
§ 45. Całka funkcji mierzalnej nieujemnej 295
1. Całka funkcji prostej nieujemnej 295
2. Definicja całki funkcji mierzalnej nieujemnej 299
3. Podstawowe własności całki 301
4. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki 305
5. Całka jako funkcja zbioru 306
§ 46. Całka funkcji o wartościach w przestrzeni Banacha 307
1. Całka funkcji prostej 307
2. Całkowalność i definicja całki 310
3. Podstawowe własności funkcji całkowalnych 312
4. Przypadek funkcji o wartościach rzeczywistych 318
5. Twierdzenia o przechodzeniu do granicy pod znakiem całki 319
6. Całka jako funkcja zbioru 322
§ 47. Całka Lebesgue'a 324
1. Wstęp 324
2. Całka funkcji ciągłej 324
3. Całka funkcji jednej zmiennej. Całki niewłaściwe 327
4. Zasada Cavalieriego 334
5. Geometryczna interpretacja całki funkcji mierzalnej nieujemnej 340
6. Całkowanie przez sprowadzenie do całki iterowanej 341
7. Całkowanie przez podstawienie 349
8. Całka jako funkcja parametrów 360

Rozdział VII. Całki na hiperpowierzchniach

§ 48. Hiperpowierzchnie 364
1. Definicja 364
2. Odwzorowania regularne podzbiorów przestrzeni R^k w przestrzeń R^m ($k \leqslant m$). Dyfeomorfizmy 367
3. Hiperpowierzchnie gładkie i kawałkami gładkie 370
4. Łuki i kontury 377
5. Podprzestrzeń styczna i hiperpłaszczyzna styczna 378
§ 49. Miara i całka na hiperpowierzchniach 382
1. Objętość równoległościanu k-wymiarowego w R^m 382
2. Miara i całka na hiperpowierzchni gładkiej 385
3. Miara i całka na hiperpowierzchni kawałkami gładkiej 391
§ 50. Formy różniczkowe 394
1. Funkcje wieloliniowe skośnie symetryczne 394
2. Iloczyn zewnętrzny funkcji wieloliniowych skośnie symetrycznych 396
3. Formy różniczkowe 401
4. Iloczyn zewnętrzny form różniczkowych 401
5. Różniczka zewnętrzna funkcji 403
6. Postać kanoniczna formy różniczkowej 403
7. Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej 405
8. Zamiana zmiennych w formach różniczkowych 409
§ 51. Orientacja hiperpowierzchni 412
1. Orientacja przestrzeni liniowej skończenie wymiarowej 412
2. Orientacja podprzestrzeni $(k-1)$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej k-wymiarowej . . . 414
3. Orientacja hiperpowierzchni. Hiperpowierzchnie orientowalne 415
§ 52. Całka formy różniczkowej na hiperpowierzchni zorientowanej 424
1. Definicja i podstawowe własności całki 424
2. Twierdzenie o rozkładzie jedności 429
3. Twierdzenie Stokesa 432
§ 53. Całka 1-formy po drodze 446
1. Definicja i podstawowe własności całki 446
2. Funkcja pierwotna i niezależność od drogi całkowania 449
3. Przypadek formy zamkniętej 452
4. Interpretacja w teorii pola 458

Rozdział VIII. Funkcje zmiennej zespolonej

§ 54. Różniczkowanie i całkowanie w dziedzinie zespolonej 460
1. Pochodna. Funkcje holomorficzne 460
2. Szeregi potęgowe 461
3. Kryterium różniczkowalności 464
4. Całkowanie po drodze. Funkcja pierwotna 466
5. Logarytm 467
6. Całka krzywoliniowa 469
§ 55. Wzór całkowy Cauchy'ego i jego konsekwencje 473
1. Wzór całkowy Cauchy'ego 473
2. Rozwijalność funkcji holomorficznej w szereg potęgowy. Funkcje analityczne 474
3. Zera funkcji holomorficznej 476
4. Rozwinięcie funkcji holomorficznej w szereg Laurenta 476
5. Punkty osobliwe odosobnione 478
6. Residua funkcji holomorficznej 479

Rozdział IX. Wstęp do analizy harmonicznej

§ 56. Szeregi Fouriera 483
1. Szereg Fouriera funkcji okresowej 483
2. Kryterium Diniego 487
3. Funkcje o wahaniu skończonym 492
4. Kryterium Jordana 493
§ 57. Wzór całkowy Fouriera 497
1. Wstęp 497
2. Kryteria przedstawialności funkcji wzorem całkowym Fouriera 498

Literatura 502

Skorowidz 503

Zaczniemy od ustalenia podstawowych oznaczeń, jakimi będziemy posługiwać się w tej książce. Uporządkujemy też i uzupełnimy wiadomości z teorii mnogości, niezbędne do zrozumienia wykładu. Przypomnimy także podstawowe własności liczb rzeczywistych i omówimy najważniejsze fakty z teorii liczb zespolonych.

Zakładamy znajomość elementów logiki matematycznej, a w szczególności rachunku zdań. Używamy następujących oznaczeń logicznych:

$\sim$ dla negacji,
$\vee$ dla alternatywy,
$\wedge$ dla koniunkcji,
$\Rightarrow$ dla implikacji,
$\Leftrightarrow$ dla równoważności,
$\bigwedge$ dla kwantyfikatora ogólnego,
$\bigvee$ dla kwantyfikatora szczegółowego.

§ 1. Podstawowe pojęcia mnogościowe

1. Zbiory. W książce tej zbiory oznaczamy wyłącznie literami dużymi, a ich elementy literami małymi. Dla zanotowania, że *a jest elementem zbioru A*, piszemy $a \in A$; jeżeli a nie należy do zbioru A, to piszemy $a \notin A$.

$A \subset B$ lub $B \supset A$ jest zapisem tego, że *zbiór A zawiera się w zbiorze B* (inaczej: jest *podzbiorem* zbioru B), tj. że każdy element zbioru A jest elementem zbioru B.

Zbiór pusty oznaczamy przez $\emptyset$.

Zbiór skończony złożony z elementów $a_1, a_2, \ldots, a_k$ oznaczamy przez $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. W szczególności $\{a\}$ jest symbolem zbioru zawierającego jedynie element a.

Zbiór wszystkich elementów zbioru X mających daną własność w oznaczamy symbolami

$$\{x \in X : w(x)\} \quad \text{i} \quad \{x : w(x)\}$$

(drugiego używamy wtedy, gdy nie może być wątpliwości, jaki zbiór pełni rolę zbioru X).

Zbiory nazywać będziemy także *rodzinami*, *klasami* lub *mnogościami*.

Występujące w analizie matematycznej zbiory są z reguły podzbiorami pewnego ustalonego zbioru, zwanego *przestrzenią*.

Niech dana będzie przestrzeń X i niech każdemu elementowi s pewnego zbioru S przyporządkowany będzie zbiór $A_s \subset X$. Rodzinę złożoną ze wszystkich zbiorów A_s, gdzie $s \in S$, oznaczać będziemy przez $\{A_s\colon s \in S\}$. Zbiór S nazywa się wtedy *zbiorem wskaźników*.

Szczególną rolę w analizie odgrywają zbiory liczb. Dla niektórych z nich rezerwujemy specjalne oznaczenia. Są to zbiory: N – wszystkich liczb naturalnych [1], R – wszystkich liczb rzeczywistych, C – wszystkich liczb zespolonych.

2. Działania na zbiorach. Niech dana będzie rodzina $\mathfrak{R}$ podzbiorów ustalonego zbioru (przestrzeni) X. Zbiór

$$\{x \in X\colon \bigvee_{A \in \mathfrak{R}} x \in A\}$$

nazywamy *sumą* zbiorów rodziny $\mathfrak{R}$, a zbiór

$$\{x \in X\colon \bigwedge_{A \in \mathfrak{R}} x \in A\}$$

iloczynem lub *częścią wspólną* zbiorów tej rodziny. Przyjmując $\mathfrak{R} = \{A_s\colon s \in S\}$ używamy oznaczeń $\bigcup_{s \in S} A_s$ dla sumy i $\bigcap_{s \in S} A_s$ dla iloczynu zbiorów rodziny $\mathfrak{R}$.

Sumę zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ oznaczamy przez

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_k \quad \text{lub} \quad \bigcup_{i=1}^{k} A_i,$$

a ich iloczyn przez

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_k \quad \text{lub} \quad \bigcap_{i=1}^{k} A_i.$$

Dla sumy zbiorów A_i, gdzie $i = 1, 2, \ldots$, używa się najczęściej symboli

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \quad \text{oraz} \quad \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i,$$

a dla ich iloczynu – symboli

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \quad \text{oraz} \quad \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i.$$

Liczbę 1, od której zaczyna się numerowanie, możemy zastąpić przez dowolną inną liczbę całkowitą.

Różnicą zbiorów A i B nazywamy zbiór

$$A \setminus B = \{x \in A\colon x \notin B\}.$$

Jeżeli A jest podzbiorem przestrzeni X, to zbiór $X \setminus A$ nazywamy *dopełnieniem* zbioru A.

---

[1] Tzn. liczb całkowitych dodatnich.

Dla dowolnej rodziny $\{A_s: s \in S\}$ podzbiorów przestrzeni X zachodzą następujące związki:

$$X \setminus \bigcup_{s \in S} A_s = \bigcap_{s \in S} (X \setminus A_s) \quad \text{i} \quad X \setminus \bigcap_{s \in S} A_s = \bigcup_{s \in S} (X \setminus A_s).$$

Są to tzw. *prawa De Morgana.*

Jeżeli $A \cap B = \emptyset$, tzn. jeżeli zbiory A i B nie mają elementów wspólnych, to mówimy, że zbiory A i B są *rozłączne.*

3. Produkty kartezjańskie. Pojęcie *pary uporządkowanej* (a, b) – zwanej także *układem uporządkowanym* elementów a i b – można wprowadzić w ścisły sposób przyjmując definicję następującą:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}.$$

Za definicję *trójki uporządkowanej*, czyli układu uporządkowanego trzech elementów, przyjmujemy równość $(a, b, c) = ((a, b), c)$. Ogólnie, definicją *układu uporządkowanego k elementów* jest wzór rekurencyjny

$$(a_1, a_2, \ldots, a_k) = ((a_1, \ldots, a_{k-1}), a_k). \tag{1}$$

Element a_i nazywa się *i-tą współrzędną* układu (1).

Zauważmy, że $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (b_1, b_2, \ldots, b_k)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_i = b_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$.

W przyszłości, dla uproszczenia zapisów, układ uporządkowany, którego wszystkie współrzędne oznaczone są jedną literą, oznaczać będziemy tą samą literą półgrubą; na przykład układ (1) ma w tej notacji symbol $\boldsymbol{a}$.

Produktem lub *iloczynem kartezjańskim* zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ nazywamy zbiór wszystkich układów uporządkowanych $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, gdzie $a_i \in A_i$ dla $i = 1, 2, \ldots, k$. Produkt kartezjański zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_k$ oznaczamy przez

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k \quad \text{lub} \quad \bigtimes_{i=1}^{k} A_i.$$

Zauważmy, że

$$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k = (A_1 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k.$$

Produkt

$$\underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{k \text{ razy}}$$

oznaczamy przez A^k.

4. Relacje równoważności. Podział na klasy. *Relacją* w zbiorze X nazywamy każdy podzbiór R produktu $X \times X$. Jeżeli $(x, y) \in R$, to mówimy, że *x jest w relacji R z y* i piszemy xRy. Literę R można oczywiście zastąpić innym symbolem; na przykład relacja mniejszości w zbiorze liczb rzeczywistych oznaczana jest przez $<$.

Relację R w zbiorze X nazywamy *relacją równoważności*, jeżeli jest:

1° *zwrotna*, tzn. $\bigwedge_{x \in X} xRx$,

2° *symetryczna*, tzn. $\bigwedge_{x,y \in X} (xRy) \Rightarrow (yRx)$,

3° *przechodnia*, tzn. $\bigwedge_{x,y,z \in X} (xRy) \wedge (yRz) \Rightarrow (xRz)$.

Niech R będzie relacją równoważności w zbiorze X. Każdemu $y \in X$ można przyporządkować zbiór

$$K_y = \{x \in X : xRy\}.$$

Zbiory K_y nazywamy *klasami relacji* R, a krócej *R-klasami*.

TWIERDZENIE 1. *Dwa elementy $x_1, x_2 \in X$ należą do tej samej R-klasy wtedy i tylko wtedy, gdy $x_1 R x_2$.*

Różne R-klasy są rozłączne. Każdy element $x \in X$ należy do pewnej R-klasy.

Dowód. Niech $x_1 \in K_y$ i $x_2 \in K_y$. Mamy zatem $x_2 R y$, a to implikuje $y R x_2$. Ponieważ $x_1 R y$, więc stąd wynika, że $x_1 R x_2$.

Na odwrót, jeżeli $x_1 R x_2$, to $x_1 \in K_{x_2}$ i również $x_2 \in K_{x_2}$, bo $x_2 R x_2$.

Załóżmy, że R-klasy K_{y_1} i K_{y_2} mają element wspólny y_0. Jeżeli $x \in K_{y_1}$, to na mocy tego, co już udowodniliśmy, xRy_0. Ponieważ $y_0 R y_2$, więc także xRy_2, tzn. $x \in K_{y_2}$. Zatem $K_{y_1} \subset K_{y_2}$ i wobec równouprawnienia obu R-klas $K_{y_2} \subset K_{y_1}$, a stąd $K_{y_1} = K_{y_2}$.

Pozostaje zauważyć, że $x \in K_x$ dla każdego $x \in X$.

Rodzinę podzbiorów rozłącznych zbioru X, taką że każdy element $x \in X$ należy do któregoś ze zbiorów tej rodziny, nazywa się *podziałem* zbioru X. Twierdzenie 1 mówi, że jeżeli R jest relacją równoważności w zbiorze X, to rodzina wszystkich R-klas jest podziałem zbioru X.

5. Funkcje. Niech dane będą zbiory niepuste X i Y. Zapis

$$f : X \to Y$$

oznacza, że na zbiorze X określona jest *funkcja f o wartościach w zbiorze Y*, tzn. że każdemu elementowi $x \in X$ przyporządkowany został jednoznacznie element $y \in Y$, oznaczany przez $f(x)$ — co zapisujemy

$$x \to f(x). \tag{2}$$

Zbiór X nazywa się *dziedziną* funkcji f.

Czasami symbol $f(x)$ okazuje się niewygodny; wówczas zastępujemy go przez $f \cdot x$. Niekiedy dla oznaczenia funkcji zamiast f używamy symbolu (2) — wtedy mianowicie, gdy wiadomo, jak $f(x)$ wyraża się przez x (na przykład mówimy o funkcjach $x \to x^2$, $x \to \cos x$ itp. nie wprowadzając dla nich specjalnych oznaczeń literowych).

Funkcję $f : X \to Y$ nazywamy także *odwzorowaniem* zbioru X w zbiór Y albo *operacją* (odwzorowującą zbiór X w zbiór Y).

Oczywiście dla oznaczenia funkcji można używać zamiast f dowolnej innej litery

Zauważmy, że do pojęcia funkcji odwołaliśmy się już wcześniej, mówiąc o rodzinie zbiorów $\{A_s: s \in S\}$. Określenie takiej rodziny wymaga uprzedniego określenia funkcji $s \to A_s$.

Najprostszym przykładem funkcji jest *funkcja stała*: $f=\text{const}$, przyporządkowująca każdemu elementowi zbioru X ten sam element c zbioru Y. Aby nie komplikować zapisów, funkcję taką będziemy oznaczać dalej po prostu przez c (oczywiście nie w przypadkach, kiedy to mogłoby prowadzić do nieporozumień).

Inny przykład to *identyczność*. Jest to odwzorowanie $\mathrm{id}_X: X \to X$ określone równością

$$\bigwedge_{x \in X} \mathrm{id}_X(x)=x.$$

Wykresem funkcji $f: X \to Y$ nazywamy podzbiór

$$\{(x, y): (x \in X) \wedge (y=f(x))\}$$

produktu kartezjańskiego $X \times Y$.

Przyjęta przez nas tradycyjna definicja funkcji, oparta na intuicyjnym pojęciu przyporządkowania, oczywiście nie jest całkiem precyzyjna (czym jest właściwie przyporządkowanie?). Dlatego obecnie używana jest często zamiast niej inna definicja. Mianowicie przez funkcję określoną na zbiorze X o wartościach w zbiorze Y rozumie się każdy podzbiór f produktu kartezjańskiego $X \times Y$ mający tę własność, że dla każdego elementu $x \in X$ istnieje dokładnie jeden element $y \in Y$ — oznaczany przez $f(x)$ — taki, że $(x, y) \in f$. Definicja taka odpowiada współczesnym wymaganiom pod względem ścisłości. Ma ona jednak tę wadę, że identyfikuje funkcję z jej wykresem. Ponieważ bardziej naturalne wydaje się rozróżnianie tych pojęć, więc w tej książce posługujemy się tradycyjną definicją funkcji.

Funkcję

$$n \to a_n \tag{3}$$

określoną na zbiorze wszystkich liczb naturalnych nazywamy *ciągiem* (dokładniej: *ciągiem nieskończonym*) i oznaczamy przez

$$(a_1, a_2, \ldots) \quad \text{lub} \quad (a_n). \tag{4}$$

Element a_n nazywa się *n-tym wyrazem* albo *n-tą współrzędną ciągu* (4). Zbiór wszystkich wyrazów ciągu (4) oznaczamy przez

$$\{a_1, a_2, \ldots\} \quad \text{lub} \quad \{a_n: n \in N\}.$$

Funkcja (3) określona na zbiorze $\{1, 2, \ldots, k\}$ nosi nazwę *ciągu skończonego* (*k-wyrazowego*); można ją oczywiście utożsamiać z układem uporządkowanym $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$.

Funkcję

$$(i, j) \to a_{ij}$$

określoną na produkcie $\{1, 2, \ldots, n\} \times \{1, 2, \ldots, m\}$ nazywamy *macierzą* o elementach a_{ij} i oznaczamy przez

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

lub przez $[a_1, a_2, \ldots, a_m]$, gdzie $a_j=(a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ dla $j=1, 2, \ldots, m$ (a_j jest j-tą kolumną tej macierzy), albo po prostu symbolem $[a_{ij}]$.

Niech dana będzie funkcja $f\colon X\to Y$.

Jeżeli w jest pewną własnością elementów zbioru X, to zbiór wszystkich elementów $f(x)$, gdzie x jest dowolnym elementem zbioru X mającym własność w, oznaczać będziemy symbolem

$$\{f(x)\colon w(x)\}.$$

Jeżeli $A\subset X$, to zbiór

$$f(A)=\{f(x)\colon x\in A\}$$

nazywamy *obrazem* zbioru A. Wprost z definicji wynika

TWIERDZENIE 2. *Dla dowolnych podzbiorów A_1, A_2 i A_s ($s\in S$) zbioru X*

(a_1) $(A_1\subset A_2)\Rightarrow(f(A_1)\subset f(A_2))$,

(a_2) $f(\bigcup_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} f(A_s)$,

(a_3) $f(\bigcap_{s\in S} A_s)\subset\bigcap_{s\in S} f(A_s)$.

Zauważmy, że inkluzja w (a_3) nie może być zastąpiona równością. Na przykład jeżeli $X=A_1\cup A_2$, $A_1\neq\emptyset$, $A_2\neq\emptyset$, $A_1\cap A_2\neq\emptyset$ i $f=\text{const}=c$, to $f(A_1\cap A_2)=\emptyset\neq f(A_1)\cap f(A_2)=\{c\}$.

Zbiór $f(X)$ nazywamy *zbiorem wartości* funkcji f. Jeżeli $f(X)=Y$, to mówimy, że f *odwzorowuje zbiór X na zbiór Y* i piszemy $f\colon X\xrightarrow{\text{na}} Y$. Ogólniej, jeżeli $A\subset X$, $B\subset Y$ i $f(A)=B$, to mówimy, że f *odwzorowuje A na B*.

Niech $B\subset Y$. Zbiór

$$f^{-1}(B)=\{x\in X : f(x)\in B\}$$

nazywamy *przeciwobrazem* zbioru B. Wprost z definicji wynika

TWIERDZENIE 3. *Dla dowolnych podzbiorów B_1, B_2 i B_s ($s\in S$) zbioru Y*

(b_1) $(B_1\subset B_2)\Rightarrow(f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2))$,

(b_2) $f^{-1}(\bigcup_{s\in S} B_s)=\bigcup_{s\in S} f^{-1}(B_s)$,

(b_3) $f^{-1}(\bigcap_{s\in S} B_s)=\bigcap_{s\in S} f^{-1}(B_s)$,

(b_4) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$.

Jeżeli dana jest funkcja $f\colon X\to Y$ i zbiór niepusty $A\subset X$, to funkcję $g\colon A\to Y$ określoną równością

$$\bigwedge_{x\in A} g(x)=f(x)$$

nazywamy *funkcją f zredukowaną do zbioru A* i oznaczamy przez $f|A$.

Złożeniem (inaczej: *superpozycją*) funkcji $f\colon X\to Y$ i $g\colon Y\to Z$ nazywamy funkcję $g\circ f\colon X\to Z$ zdefiniowaną następująco:

$$\bigwedge_{x\in X}(g\circ f)(x)=g(f(x)).$$

Złożenie $g\circ f$ rozważać będziemy również w przypadku ogólniejszym, gdy $f\colon X\to Y$, $g\colon Y_1\to Z$, $Y_1\subset Y$ i $A=f^{-1}(Y_1)\neq\emptyset$. Określamy je wtedy równością $g\circ f=g\circ(f|A)$; dziedziną funkcji $g\circ f$ jest podzbiór A dziedziny X funkcji f, na ogół różny od X.

Mówimy, że funkcja $f\colon X\to Y$ jest *odwracalna* lub że jest *bijekcją* (dokładniej: *bijekcją zbioru X na zbiór $f(X)$*), jeżeli dla każdego $y\in f(X)$ istnieje dokładnie jeden element $x\in X$ taki, że $f(x)=y$. Oczywiście funkcja f jest odwracalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest *różnowartościowa*, tzn. gdy

$$\bigwedge_{x_1,\,x_2\in X}(f(x_1)=f(x_2))\Rightarrow(x_1=x_2).$$

Jeżeli funkcja $f\colon X\to Y$ jest odwracalna, to oznaczając dla każdego $y\in f(X)$ przez $f^{-1}(y)$ jedyny element $x\in X$ taki, że $f(x)=y$, określamy pewną funkcję $f^{-1}\colon f(X)\to X$, którą nazywamy *funkcją odwrotną* do f. Z definicji

$$\bigwedge_{x\in X}\bigwedge_{y\in f(X)}(f^{-1}(y)=x)\Leftrightarrow(f(x)=y),$$

a stąd

$$\text{(5)}\qquad \bigwedge_{x\in X}f^{-1}(f(x))=x \quad\text{oraz}\quad \bigwedge_{y\in f(X)}f(f^{-1}(y))=y.$$

Jeżeli funkcja f jest odwracalna, to odwracalna jest także funkcja f^{-1} i $(f^{-1})^{-1}=f$.

Zauważmy, że jeżeli f jest bijekcją X na Y, a g bijekcją Y na Z, to $g\circ f$ jest bijekcją X na Z i $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

TWIERDZENIE 4. *Funkcja $f\colon X\to Y$ jest bijekcją X na Y wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje funkcja $g\colon Y\to X$ taka, że*

$$\text{(6)}\qquad g\circ f=\mathrm{id}_X \quad i \quad f\circ g=\mathrm{id}_Y.$$

Funkcją g jest funkcja odwrotna f^{-1}.

Dowód konieczności. Jeżeli funkcja f jest bijekcją X na Y, to z (5) wynika, że funkcja $g=f^{-1}$ spełnia oba warunki (6).

Dowód dostateczności. Na mocy pierwszego z warunków (6) $g(f(x))=x$ dla każdego $x\in X$. Stąd wynika, że jeżeli $f(x_1)=f(x_2)$, to $x_1=x_2$. Ponieważ dla każdego $y\in Y$ na mocy drugiego z warunków (6) mamy $f(g(y))=y$, tzn. $f(x)=y$ dla $x=g(y)$, więc $f(X)=Y$ i $f^{-1}(y)=g(y)$ dla wszystkich $y\in Y$. Dowodzi to, że f jest bijekcją X na Y i że $f^{-1}=g$.

Jeżeli X jest podzbiorem produktu $X_1\times\ldots\times X_k$ i $f\colon X\to Y$, to element $f(x)$, gdzie $x=(x_1,\ldots,x_k)$, oznacza się również przez

$$f(x_1,\ldots,x_k)\quad\text{lub}\quad f\cdot(x_1,\ldots,x_k)$$

i mówi się, że f jest *funkcją k zmiennych $x_1,\ldots,x_k$*.

Funkcje o wartościach w produkcie $Y_1 \times \ldots \times Y_k$ oznaczać będziemy dużymi literami. Zauważmy, że jeżeli $F\colon X \to Y_1 \times \ldots \times Y_k$ i $x \in X$, to $F(x)$, jako element rozważanego produktu, ma k współrzędnych; oznaczając je przez $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ mamy

$$\bigwedge_{x \in X} F(x) = (f_1(x), \ldots, f_k(x)). \tag{7}$$

Wobec dowolności elementu $x \in X$ określony został w ten sposób układ funkcji

$$f_i\colon X \to Y_i, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{8}$$

które nazywamy *współrzędnymi* funkcji F. Zamiast (7) piszemy krótko

$$F = (f_1, \ldots, f_k). \tag{9}$$

Na odwrót, dla dowolnego układu funkcji (8) wzór (7) lub równoważny mu wzór (9) określa funkcję $F\colon X \to Y_1 \times \ldots \times Y_k$.

6. Zbiory przeliczalne. Zbiór niepusty A jest *przeliczalny*, jeżeli

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}, \tag{10}$$

tzn. gdy jest zbiorem wyrazów pewnego ciągu (a_n). Zbiór pusty uważamy także za przeliczalny.

TWIERDZENIE 5. *Każdy zbiór skończony jest przeliczalny.*

Dowód. Jeżeli $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$, to jednocześnie

$$A = \{a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots\},$$

a zatem — zgodnie z definicją — zbiór A jest przeliczalny.

Przykładem zbioru przeliczalnego nieskończonego jest zbiór wszystkich liczb naturalnych. Zbiór wszystkich liczb całkowitych też jest przeliczalny, ponieważ można mu nadać postać $\{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

TWIERDZENIE 6. *Podzbiór zbioru przeliczalnego jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Niech A będzie zbiorem przeliczalnym i $B \subset A$. Wobec twierdzenia 5 wystarczy zająć się przypadkiem, gdy zbiór B jest nieskończony. Przyjmując równość (10) oznaczmy przez n_1 najmniejszą liczbę naturalną n, dla której $a_n \in B$, następnie przez n_2 najmniejszą liczbę naturalną n większą od n_1 i taką, że $a_n \in B$, przez n_3 najmniejszą liczbę naturalną n większą od n_2 i taką, że $a_n \in B$ itd. Wtedy $B = \{a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots\}$, co dowodzi przeliczalności zbioru B.

TWIERDZENIE 7. *Jeżeli A_i $(i = 1, 2, \ldots)$ są zbiorami przeliczalnymi, to suma $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Można przyjąć, że $A_i \neq \emptyset$ dla każdego wskaźnika i. Z założenia mamy $A_i = \{a_{1i}, a_{2i}, \ldots\}$ dla $i = 1, 2, \ldots$ Przeliczalność sumy zbiorów A_i wynika z równości

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, \ldots, a_{1i}, a_{2,i-1}, \ldots, a_{i-1,2}, a_{i1}, \ldots\}.$$

WNIOSEK. *Jeżeli $A_1, \ldots, A_k$ są zbiorami przeliczalnymi, to suma $A_1 \cup \ldots \cup A_k$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dla dowodu wystarczy zauważyć, że $A_1 \cup \ldots \cup A_k = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, gdzie $A_i = A_k$ dla $i > k$.

TWIERDZENIE 8. *Jeżeli A_i $(i=1, 2, \ldots, k)$ są zbiorami przeliczalnymi, to produkt $A_1 \times \ldots \times A_k$ jest zbiorem przeliczalnym.*

Dowód. Produkt dwóch zbiorów przeliczalnych jest zbiorem przeliczalnym. Istotnie, jeżeli $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$ i $B=\{b_1, b_2, \ldots\}$, to

$$A \times B = \{(a_1, b_1), (a_1, b_2), (a_2, b_1), \ldots$$

$$\ldots, (a_1, b_n), (a_2, b_{n-1}), \ldots, (a_{n-1}, b_2), (a_n, b_1), \ldots\}.$$

Stąd i z równości

$$A_1 \times \ldots \times A_k = (A_1 \times \ldots \times A_{k-1}) \times A_k$$

wynika, że założenie przeliczalności produktu $k-1$ zbiorów przeliczalnych pociąga za sobą przeliczalność produktu k zbiorów przeliczalnych.

Zastosowanie zasady indukcji kończy dowód.

TWIERDZENIE 9. *Jeżeli zbiór niepusty A jest przeliczalny, to dla każdej funkcji f określonej na A zbiór $f(A)$ jest przeliczalny.*

Dowód. Jeżeli $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$, to $f(A)=\{f(a_1), f(a_2), \ldots\}$.

TWIERDZENIE 10. *Zbiór wszystkich liczb rzeczywistych wymiernych jest przeliczalny.*

Dowód. Przyjmijmy

$$f(n, m)=\frac{m}{n} \quad \text{dla} \quad n \in N, \quad m \in R_c,$$

gdzie R_c oznacza zbiór wszystkich liczb rzeczywistych całkowitych. Ponieważ na mocy twierdzenia 8 produkt $N \times R_c$, na którym określona jest funkcja f, jest zbiorem przeliczalnym, więc z twierdzenia 9 wynika przeliczalność zbioru $f(N \times R_c)$, tj. zbioru wszystkich liczb wymiernych.

W następnym paragrafie udowodnimy, że zbiór R wszystkich liczb rzeczywistych jest przykładem zbioru nieprzeliczalnego (tw. 1).

Ćwiczenia

1. Dowieść, że

$$\Big(\bigcup_{s \in S} A_s\Big) \cap \Big(\bigcup_{t \in T} B_t\Big) = \bigcup_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \cap B_t),$$

$$\Big(\bigcap_{s \in S} A_s\Big) \cup \Big(\bigcap_{t \in T} B_t\Big) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \cup B_t),$$

$$\Big(\bigcup_{s \in S} A_s\Big) \times \Big(\bigcup_{t \in T} B_t\Big) = \bigcup_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \times B_t),$$

$$\Big(\bigcap_{s \in S} A_s\Big) \times \Big(\bigcap_{t \in T} B_t\Big) = \bigcap_{\substack{s \in S \\ t \in T}} (A_s \times B_t).$$

2. Niech dane będą zbiory A_i $(i=1,2,\ldots)$. Dowieść, że jeżeli $B_1=A_1$, $B_i=A_i\setminus(A_1\cup\ldots\cup A_{i-1})$ dla $i=2,3,\ldots$, to zbiory B_i są rozłączne oraz

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i=\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i.$$

3. Dowieść, że jeżeli f jest funkcją określoną na zbiorze X, to równość

$$f\Big(\bigcap_{s\in S} A_s\Big)=\bigcap_{s\in S} f(A_s)$$

zachodzi dla każdej rodziny $\{A_s\colon s\in S\}$ podzbiorów zbioru X wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja f jest odwracalna.

4. Niech f będzie funkcją określoną na zbiorze X i $A_1, A_2\subset X$. Wykazać, że

$$f(A_1)\setminus f(A_2)\subset f(A_1\setminus A_2).$$

Jeżeli funkcja f jest odwracalna, to inkluzję można zastąpić równością.

5. Dowieść, że zbiór nieskończony A jest przeliczalny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje bijekcja zbioru A na N.

6. Wykazać, że zbiór wszystkich ciągów skończonych o wyrazach wymiernych jest przeliczalny.

7. Wykazać, że zbiór wszystkich ciągów nieskończonych (a_n), gdzie $a_n=0$ lub 1, jest nieprzeliczalny.

8. Wykazać nieprzeliczalność rodziny wszystkich podzbiorów dowolnego zbioru nieskończonego.

§ 2. Liczby rzeczywiste

1. Zbiór R liczb rzeczywistych jako ciało. Podstawowe działania wykonalne w zbiorze liczb rzeczywistych to *dodawanie* i *mnożenie*.

Działanie dodawania

$$(1)\qquad (x,y)\to x+y$$

spełnia następujące cztery prawa:

(a_1) $\bigwedge_{x,y} x+y=y+x$ (*przemienność*),

(a_2) $\bigwedge_{x,y,z} (x+y)+z=x+(y+z)$ (*łączność*),

(a_3) $\bigvee_{0}\bigwedge_{x} x+0=x$,

(a_4) $\bigwedge_{x}\bigvee_{z} x+z=0$, oznaczenie: $z=-x$.

Jak wiadomo, prostymi wnioskami z własności (a_1) - (a_4) są następujące podstawowe fakty:

(b_1) liczba 0 (*zero*) jest tylko jedna,

(b_2) dla dowolnej pary liczb x i y istnieje dokładnie jedna liczba z (*różnica* $y-x$) taka, że $x+z=y$; w szczególności każdej liczbie x przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $-x$ (*przeciwna* do x).

Działanie mnożenia

$$(x, y) \to xy \tag{2}$$

podporządkowane jest podobnym prawom:

(a_5) $\bigwedge_{x,y} xy = yx$ (*przemienność*),

(a_6) $\bigwedge_{x,y,z} (xy)z = x(yz)$ (*łączność*),

(a_7) $\bigvee_{1 \neq 0} \bigwedge_{x} x1 = x$,

(a_8) $\bigwedge_{x \neq 0} \bigvee_{z} xz = 1$, oznaczenie: $z = 1/x$.

Stąd można wyprowadzić, że:

(b_3) liczba 1 (*jedność*) jest tylko jedna,

(b_4) dla dowolnej pary liczb x i y, gdzie $x \neq 0$, istnieje dokładnie jedna liczba z (*iloraz* y/x) taka, że $xz = y$; w szczególności każdej liczbie $x \neq 0$ przyporządkowana jest dokładnie jedna liczba $1/x$ (*odwrotność* liczby x).

Jako ostatni wymienimy warunek:

(a_9) $\bigwedge_{x,y,z} x(y+z) = xy + xz$ (*rozdzielność mnożenia względem dodawania*).

Każdy zbiór X, w którym są określone dwa działania: dodawanie (1) i mnożenie (2) (funkcje odwzorowujące $X \times X$ w X) w ten sposób, że są spełnione warunki (a_1) - (a_9), nazywamy *ciałem*.

2. Relacja mniejszości. Zasada ciągłości. Podstawowe własności *relacji mniejszości* w zbiorze liczb rzeczywistych to:

(a_{10}) $\bigwedge_{x,y} (x \neq y) \Rightarrow \big((x < y) \vee (y < x)\big)$,

(a_{11}) $\bigwedge_{x,y} (x < y) \vee (x = y) \Rightarrow \big(\sim (y < x)\big)$ (*asymetryczność*),

(a_{12}) $\bigwedge_{x,y,z} (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z)$ (*przechodniość*).

Relacja mniejszości związana jest z działaniami następującymi zależnościami:

(a_{13}) $\bigwedge_{x,y,z} (x < y) \Rightarrow (x + z < y + z)$,

(a_{14}) $\bigwedge_{x,y} \bigwedge_{z>0} (x < y) \Rightarrow (xz < yz)$.

Niech dany będzie zbiór $A \subset \boldsymbol{R}$. Jeżeli istnieje liczba M taka, że

$$\bigwedge_{x \in A} x \leqslant M \quad \text{i} \quad \bigwedge_{M_1 < M} \bigvee_{x \in A} x > M_1, \tag{3}$$

to M nazywamy *kresem górnym* zbioru A i piszemy $M=\sup A$. Analogicznie, liczbę m taką, że

$$(4)\qquad \bigwedge_{x\in A} x\geqslant m \quad \text{i} \quad \bigwedge_{m_1>m} \bigvee_{x\in A} x<m_1$$

nazywamy *kresem dolnym* zbioru A i piszemy $m=\inf A$.

Mówimy, że zbiór $A\subset \boldsymbol{R}$ jest *ograniczony z góry*, jeżeli istnieje przynajmniej jedna liczba M spełniająca pierwszy z warunków (3) i że jest *ograniczony z dołu*, jeżeli istnieje przynajmniej jedna liczba m spełniająca pierwszy z warunków (4). Zbiór, który jest ograniczony z góry i jednocześnie jest ograniczony z dołu, nazywamy zbiorem *ograniczonym*.

Zasadą ciągłości nazywa się następująca własność zbiorów liczb rzeczywistych:

(a_{15}) *Każdy niepusty i ograniczony z góry zbiór liczb rzeczywistych ma kres górny. Każdy niepusty i ograniczony z dołu zbiór liczb rzeczywistych ma kres dolny.*

Dla zbioru A nieograniczonego z góry przyjmujemy dodatkowo, że $\sup A=+\infty$, a dla nieograniczonego z dołu, że $\inf A=-\infty$.

Zapisy te mają oczywiście charakter czysto formalny. Nie twierdzimy przecież, że $+\infty$ i $-\infty$ są symbolami jakichś nowych „nieskończonych" liczb (1).

Kresu górnego zbioru A nie należy mylić z liczbą największą w zbiorze A, którą — jeżeli istnieje — oznaczać będziemy przez $\max A$. Oczywiście $\max A$ istnieje wtedy i tylko wtedy, gdy $\sup A\in A$ i wówczas $\max A=\sup A$. Podobnie $\min A$ jest oznaczeniem liczby najmniejszej w zbiorze A. Jej istnienie jest równoważne temu, że $\inf A\in A$ i wówczas $\min A=\inf A$. W szczególności dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \ldots, a_k$ dobrze określone są liczby

$$\max\{a_1, a_2, \ldots, a_k\} \quad \text{i} \quad \min\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}.$$

Zauważmy, że definicję kresu górnego zbioru (niepustego) A ograniczonego z góry można zapisać następująco:

$$\sup A=\min\{M: \bigwedge_{x\in A} x\leqslant M\}.$$

Analogicznie dla zbioru A ograniczonego z dołu

$$\inf A=\max\{m: \bigwedge_{x\in A} x\geqslant m\}.$$

Jeżeli dana jest funkcja $f: X\to \boldsymbol{R}$ i własność w elementów zbioru X, to kres górny i kres dolny zbioru $\{f(x): w(x)\}$ oznaczamy odpowiednio przez

$$\sup_{w(x)} f(x) \quad \text{i} \quad \inf_{w(x)} f(x).$$

Z wymienionych wyżej własności (a_1) - (a_{15}) można wyprowadzić wszystkie inne własności liczb rzeczywistych. Innymi słowy, własności te można przyjąć za aksjomaty i oprzeć na nich całą teorię liczb rzeczywistych.

---

(1) Później jednak nabiorą takiego znaczenia. Zob. § 6.

3. Przedziały. Wartość bezwzględna. Zbiór $I \subset R$ nazywa się *przedziałem*, jeżeli

$$\bigwedge_{x_1, x_2 \in I} \bigwedge_{y \in R} (x_1 < y < x_2) \Rightarrow (y \in I).$$

Zauważmy, że zbiór pusty jest przedziałem.

Niech dany będzie przedział niepusty I. Określone są wtedy kresy $\inf I$ i $\sup I$, które nazywać będziemy *końcami* przedziału I. Jeżeli $\inf I = a \in R$ i $\sup I = b \in R$, to I jest jednym z czterech poniższych zbiorów:

$$\langle a\,;\, b\rangle = \{x:\ a \leqslant x \leqslant b\}, \quad (a\,;\, b) = \{x:\ a < x < b\},$$

$$\langle a\,;\, b) = \{x:\ a \leqslant x < b\}, \quad (a\,;\, b\rangle = \{x:\ a < x \leqslant b\}.$$

Jeżeli $\inf I = a \in R$, $\sup I = +\infty$, to I jest jednym z dwóch następujących zbiorów

$$\langle a\,;\, +\infty) = \{x:\ x \geqslant a\}, \quad (a\,;\, +\infty) = \{x:\ x > a\}.$$

Jeżeli $\inf I = -\infty$, $\sup I = b \in R$, to I jest jednym z dwóch następujących zbiorów:

$$(-\infty\,;\, b\rangle = \{x:\ x \leqslant b\}, \quad (-\infty\,;\, b) = \{x:\ x < b\}.$$

Jeżeli $\inf I = -\infty$, $\sup I = +\infty$, to $I = (-\infty; +\infty) = R$.

Przedział $\langle 0; \infty)$ – zbiór wszystkich liczb rzeczywistych nieujemnych – oznaczać będziemy także przez R_+.

Przedział $\langle a; b\rangle$ nazywać będziemy *domkniętym*, przedziały $(a; b)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; b)$ i $(-\infty; +\infty)$ – *otwartymi*; pozostałe przedziały określamy jako *domknięto-otwarte*

Definicją *wartości bezwzględnej* (inaczej: *modułu*) $|x|$ liczby $x \in R$ jest

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla} \quad x \geqslant 0, \\ -x & \text{dla} \quad x < 0. \end{cases}$$

Dla dowolnych liczb rzeczywistych x i y zachodzą następujące dwa związki o podstawowym znaczeniu:

$$|x+y| \leqslant |x| + |y| \quad \text{oraz} \quad |xy| = |x|\,|y|. \tag{5}$$

Zauważmy, że dla każdej liczby rzeczywistej a i dowolnego $r > 0$

$$\{x:\ |x-a| < r\} = (a-r\,;\, a+r),$$

$$\{x:\ |x-a| \leqslant r\} = \langle a-r\,;\, a+r\rangle.$$

4. Przykłady zastosowania zasady ciągłości. Zasada ciągłości pozwoli nam udowodnić zapowiedziane w § 1 (p. 6)

TWIERDZENIE 1. *Zbiór R wszystkich liczb rzeczywistych jest nieprzeliczalny.*

Dowód. Zauważmy, że jeżeli dana jest liczba x i przedział niezdegenerowany – tzn. niepusty i nie redukujący się do punktu – I, to istnieje przedział domknięty niezdegenerowany $I' \subset I$ taki, że $x \notin I'$.

Niech I_0 będzie dowolnym przedziałem niezdegenerowanym Przypuśćmy, że

$$I_0=\{x_1, x_2, \ \},\tag{6}$$

tj. że I_0 jest zbiorem przeliczalnym. Istnieje taki przedział domknięty niezdegenerowany $I_1 \subset I_0$, że $x_1 \notin I_1$, z kolei istnieje przedział domknięty niezdegenerowany $I_2 \subset I_1$ taki, że $x_2 \notin I_2$ itd. W rezultacie określimy nieskończony ciąg (I_n) przedziałów domkniętych taki, że dla każdego $n \in N$

$$I_n \subset I_{n-1} \quad \text{i} \quad x_n \notin I_n.$$

Przyjmijmy $I_n=\langle a_n; b_n\rangle$. Dla $m>n$ mamy $I_m \subset I_n$, a więc $a_n \leqslant a_m \leqslant b_m \leqslant b_n$. Stąd

$$a_m \leqslant b_n \quad \text{dla dowolnych} \quad n, m \in N.\tag{7}$$

Niech $A=\{a_1, a_2, \ldots\}$ i $c=\sup A$. Z definicji kresu górnego i (7) wynika, że dla każdego $n \in N$ zachodzi nierówność $a_n \leqslant c \leqslant b_n$, oznaczająca, że $c \in I_n$. Wobec (6) dla pewnego wskaźnika m mamy $x_m=c$, a w takim razie $x_m \in I_m$, co przeczy temu, że $x_n \notin I_n$ dla wszystkich $n \in N$.

Z dowiedzionej nieprzeliczalności przedziałów niezdegenerowanych wynika nieprzeliczalność zbioru $\boldsymbol{R}$ wszystkich liczb rzeczywistych (zob. § 1, tw. 6).

Zasada ciągłości umożliwia zdefiniowanie potęgi a^α o dowolnej podstawie $a>0$ i dowolnym wykładniku α. Dokonuje się tego w kilku krokach: Najpierw w zwykły sposób określamy potęgę o dowolnej podstawie $a>0$ i wykładniku całkowitym. Następnie dla dowolnego $n \in N$ definiujemy potęgę o wykładniku $\alpha=1/n$ równością

$$a^{1/n}=\inf\{x: (x>0)\wedge(x^n \geqslant a)\}$$

(nietrudno sprawdzić, że $a^{1/n}=\sqrt[n]{a}$, tj. że $(a^{1/n})^n=a$). Przyjmując dla naturalnego n i całkowego m

$$a^{m/n}=(a^{1/n})^m$$

rozszerzamy definicję potęgi na przypadek dowolnego wykładnika wymiernego. Dla $a \geqslant 1$ potęgę o dowolnym wykładniku α określamy wzorem

$$a^\alpha=\inf\{a^x: (x \in R_w)\wedge(x \geqslant \alpha)\},$$

gdzie $\boldsymbol{R}_w$ oznacza zbiór wszystkich liczb wymiernych. Dla $0<a<1$ za definicję potęgi przyjmujemy równość

$$a^\alpha=\left(\frac{1}{a}\right)^{-\alpha}.$$

Zauważmy, że zawsze

$$1^\alpha=1, \quad a^0=1.$$

Potęga ma następujące własności rachunkowe:

$$a^{\alpha+\beta}=a^\alpha a^\beta, \quad a^{\alpha-\beta}=a^\alpha/a^\beta, \quad a^{\alpha\beta}=(a^\alpha)^\beta,$$

$$(ab)^\alpha=a^\alpha b^\alpha, \quad (a/b)^\alpha=a^\alpha/b^\alpha.$$